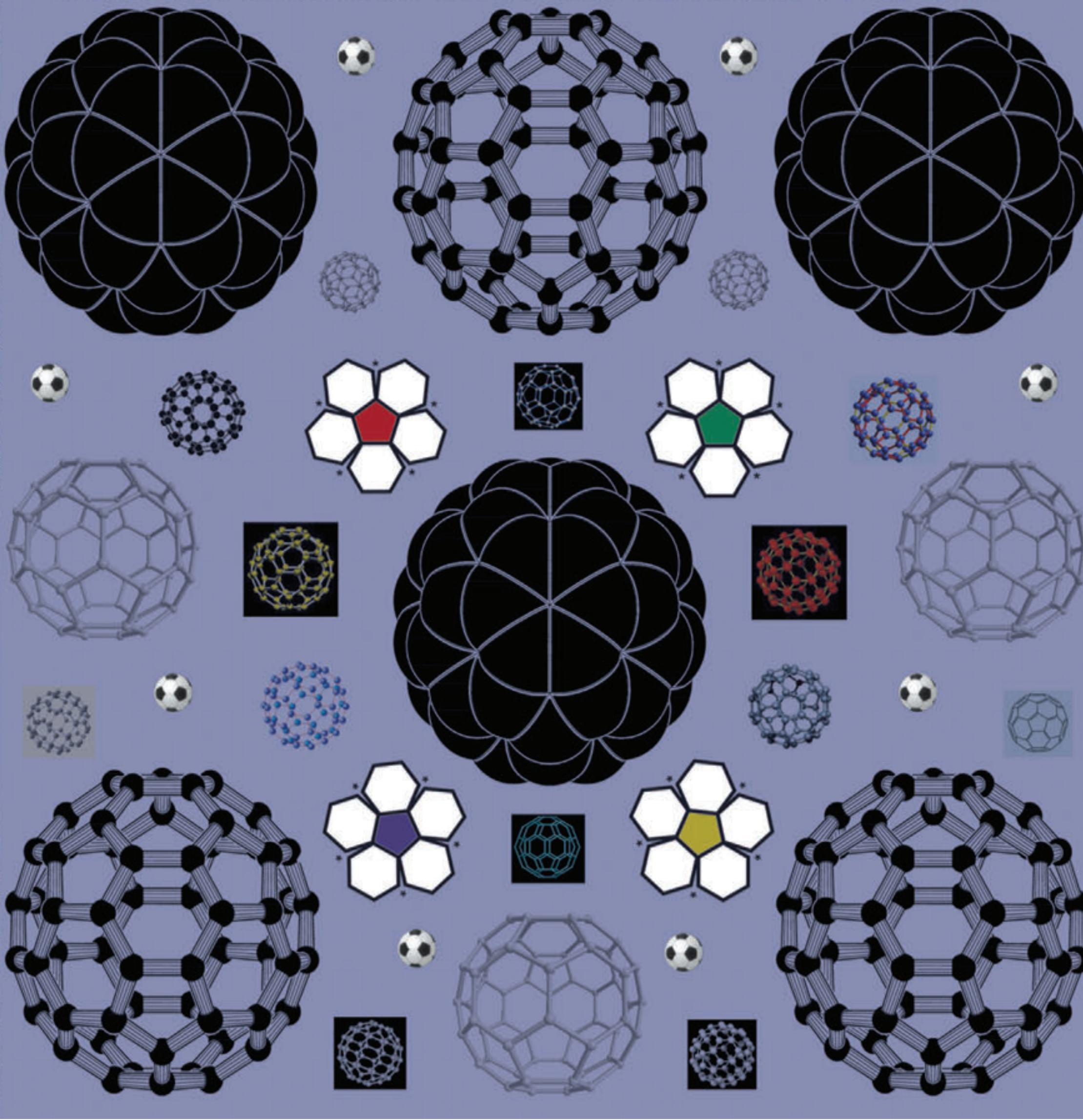
ISSN 0130–2221

ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ 2006 · №1

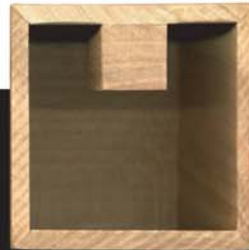
КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



Лет пятьдесят назад, еще до изобретения кубика Рубика, одной из самых популярных была головоломка в форме куба, который нужно было собрать из блоков разной конфигурации. Называлась она «Кубик СОМА» с ударением на первом слоге. За прошедшие годы придуманы сотни задач на эту тему, но продолжают появляться новые идеи, а следовательно, и новые головоломки.
В 2005 году известный американский изобретатель Стюарт Коффин привез на Всемирный съезд любителей головоломок, состоявшийся в Хельсинки, очередное изобретение. Нужно сказать, что собственные игрушки он нумерует в последовательности их создания, номер этой был 199. Предыдущие его изобретения - это, в основном, красивые деревянные конструкции, собранные из многочисленных брусков разного сечения с хитроумными пазами. Насколько они красивы, настолько и дороги, так как выполнены из древесины ценных пород: вишни, яблони, груши, красного и черного дерева, а выпускаются небольшими партиями.
И вот, наконец-то, появилась головоломка Коффина, которую каждый может сделать своими руками. Шесть блоков нужно уложить в коробку кубической формы размером 3 х 3 х 3 единичных кубика. Сложность в том, что в коробке уже есть один кубик 1 х 1 х 1, приклеенный к верхней части боковой стенки. Разумеется, он мешает укладке остальных блоков, особенно последних. Заметим, что сборку не следует начинать с упаковки блоков в коробку. Сначала нужно на столе попробовать сложить несколько вариантов кубиков 3 х 3 х 3 с пустотой в верхней части, а затем, записав расположение блоков, – попытаться уложить их в коробку. Ее, как, впрочем, и сами блоки, можно склеить из плотной бумаги или картона.

А.Калинин



Головоломка № 199

журнал Квант©
ЯНВАРЬ ФЕВРАЛЬ 2006 №1

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Бюро Квантум

Интервью с Юрием Андреевичем Осипьяном

15 февраля 2006 года исполнилось 75 лет главному редактору журнала «Квант», широко известному ученому-физику, академику Юрию Андреевичу Осипьяну. Мы поздравляем Юрия Андреевича с этой замечательной датой и желаем долгих лет жизни, крепкого здоровья и неизменных творческих успехов.

Предлагаем нашим читателям краткое изложение беседы Ю.А.Осипьяна с редакцией журнала «Квант» накануне юбилея.

– Юрий Андреевич, за что вы любите науку в целом и физику в частности? Когда вы впервые обнаружили в себе эту «прекрасную болезнь» – увлечение наукой?

– Я хорошо помню, что с юности меня увлекали такие интеллектуальные занятия, в которых главенствовали логика и строгость рассуждений. А в физике, во всех ее разделах – от механики до электродинамики, на протяжении всей истории развития реализовался главный научный постулат, состоящий в том, что всякая новая теория должна включать в себя всю имеющуюся на сегодняшний день научную концепцию. Если что-нибудь не ладится в этом построении, значит, там либо есть какая-то ошибка, либо мы чего-то не понимаем и есть предмет для глубокого размышления. Я по-прежнему считаю физику царицей наук, это самая логичная, самая общая и разносторонняя, самая цельная область науки.

Почему я стал заниматься научной работой? Любить науку, вообще говоря, можно и созерцательным образом, но я фактически всю жизнь занимался добыванием экспериментальных результатов (я экспериментатор, хотя и учился теории) и, кроме того, много лет руководил организационной деятельностью в области физических наук. При честном ответе на этот вопрос надо отдавать себе отчет, что я как личность формировался в советском государстве в эпоху коммунистической диктатуры, когда все было предопределено. Работать творчески, самостоятельно и, главное, независимо в советское время можно было только в науке. Можно сказать, что в основе моего выбора лежала любовь к свободе, к независимости принятия своих решений.

– Помните ли вы ту первую задачу, которая вас «завела» навсегда?

– Помню, и очень хорошо. Когда я был студентом-дипломником, передо мной возникла совершенно неразрешимая задача, некоторое противоречие в теории Курдюмова – я в это время работал в институте у Г.В.Курдюмова. Это был человек, который занимался применением физических знаний к объяснению очень большого раздела практической деятельности – а именно к тому, как обрабатывают металлы. Он «подложил» очень глубокие научные знания под, казалось бы, эмпирическую область, создав теорию фазовых превращений при закалке и отжиге сталей. Тут сказались его образование и то, что он происходил из Ленинградского Физтеха, его учителями были А.Ф.Иоффе, Н.Н.Семенов, П.Л.Капица. Старшее поколение, предыдущее к поколению Курдюмова, считало, что это превращение есть обычное фазовое превращение и поэтому на его кинетику должна сильнейшим образом влиять температура. Хорошо известна экспоненциальная зависимость скорости всяческих фазовых переходов от температуры в классическом варианте, много соответствующих экспериментальных фактов было добыто самим Курдюмовым, главный из которых – изотермическое превращение, когда фазовое превращение развивается во времени при постоянной температуре. Но в то же время скорость превращений для некоторых материалов была громадной даже при очень низких температурах. Это было очень важным противоречием и давало противникам теории Курдюмова некоторые экспериментальные карты. Вот эта задача меня увлекла, и я выполнил работу, за которую мне и сейчас не стыдно.

Для объяснения высокой скорости превращений при низкой температуре я привлек квантово-механические представления. Это был новый шаг в физике, потому что до этого квантовые представления применялись только для процессов, в которых существенную роль играли электроны. И это неслучайно, так как в вероятность туннельного превращения экспериментально входит ширина барьера и масса частицы, которая его проходит. Электрон имеет в 2000 раз меньшую массу, чем ядро водорода, а масса ядра железа еще в 50 раз больше, поэтому вероятность туннельного превращения таких тяжелых частиц, сами понимаете, какая будет малая. Так вот, практически впервые я применил квантово-механические представления для объяснения специфического поведения кристаллической решетки. И у меня получился, конечно, очень своеобразный, хотя и логически ясный результат. Оказалось, что скорость превращений определяется двумя компонентами – классической и квантовой. Когда превалирует классическая составляющая скорости, она экспоненциально уменьшается с температурой. А когда больший вес имеет квантовая компонента, полная скорость выходит на плато и становится независимой от температуры. Такая вот кинетика.

Эта работа была опубликована в Докладах АН СССР еще в 1955 году, больше 50 лет назад, и до сих пор имеет основополагающее значение. Надо сказать, что впоследствии Нобелевский лауреат Невилл Мотт применил похожую методику (на 30 лет позже) для описания туннелирования дислокаций в твердом теле.

– Кого вы считаете своими учителями физики?

– Конечно, это Георгий Вячеславович Курдюмов. И Юрий Васильевич Шарвин, который обучал меня экспериментальному мастерству. Он меня дрючил как сапожного подмастерья, только что не бил по рукам. А еще – Александр Иосифович Шальников. В общем, я проходил через школу Института физических проблем под руководством П.Л.Капицы. Но, пожалуй, моими непосредственными учителями были Ю.В.Шарвин и А.И.Шальников.

– Какие области науки, кроме физики, вам были небезразличны, оставили след в вашей душе?

– Мне не безразличны современная молекулярная биология, микробиология и генная инженерия. Считаю их выдающимися достижениями человеческого ума. Ясно, что этим областям науки принадлежит большое место в будущем.

– А какими научными проблемами вы занимаетесь сегодня? В чем, как вам кажется, не хватило времени разобраться до конца?

К сожалению, человеческая жизнь и особенно жизнь физической науки проходят через несколько фаз. Сначала я занимался экспериментальной деятельностью в области физики твердого тела, благо эта область позволяет осуществлять индивидуальный эксперимент: надо самому создать установку или прибор, самому получить экспериментальные результаты и самому их анализировать. Сегодня же меня больше всего занимает экспериментальное исследование фуллеренов. Это раздел современной нанонауки, нанофизики. С так называемыми нанотрубками, такими вот травообразными образованиями, которые научились выращивать, связан один волнующий меня вопрос. Оказывается, изначально эти трубки проводящие, но их проводимость либо полупроводниковая, либо металлическая. Считается, что зонная структура таких образований зависит от их киральности – своего рода неравноправности левой и правой структур. Так вот, в зависимости от киральности нанотрубки могут быть изначально либо полупроводниковыми, либо металлическими. Может быть, я в этом еще недостаточно разобрался, но у меня есть какое-то сомнение в замкнутости, в логике существующего объяснения. Многие теоретики считают, что это очевидный факт. Так вообще часто бывает с теоретиком – сначала он не понял, а потом запомнил какое-то построение настолько, что считает его очевидным и всем известным. Но мне кажется, что не до конца все-таки понятно, почему и как электронные симметрийные свойства должны зависеть от киральности, как рассчитать и написать соответствующие формулы.

– Юрий Андреевич, вы в молодые годы по сути дела с нуля создали и затем возглавили Институт физики твердого тела – один из ведущих в настоящее время институтов системы РАН. Как вам далось решение принять это предложение руководства РАН?

– Конечно, браться за такое дело было страшно. Но я, когда брался, еще не чувствовал масштабы, не ощущал глубину той ямы, в которую собираюсь прыгнуть. Я это сделал под влиянием Г.В.Курдюмова и Л.А.Арцимовича. И еще я поддался на лесть – услышать от таких людей высокую оценку моих организационных качеств и подтвердить это. В то время первая фаза моей научной деятельности было завершена. Я закончил свою научную работу, защитил кандидатскую диссертацию и хотел развернуться в сторону более общефизическую, чем мне сулила работа в той области, чем занимался Курдюмов.

– Что вам лично давало руководство огромным коллективом людей разных профессий? Не посещали ли вас разочарования на этой жизненной ниве?

– Конечно, посещали. Сначала у меня были честолюбивые устремления, что я теперь руководитель большого коллектива, что я сейчас всех распределю и буду всеми руководить. Но и сказать, что все мои сверстники быстренько вылезли из-под моей опеки и тоже стали заниматься своими делами. А я остался в роли генерала без армии перед необходимостью решать многие только организационные вопросы. Я понял, что науку в своей области можно делать только своими руками, когда возможен нормальный эксперимент.

– А что помимо занятий наукой доставляет вам такую же, а может быть еще большую, радость?

– Чем я становлюсь старше, тем больше утверждаюсь в мысли, что занятия только наукой не есть самое главное в жизни. Занятия искусством тоже очень важны и могут дать такие же озарения, как наука. Фактически это две области человеческой деятельности – точное сознательное и интуитивное образное – существуют параллельно. Сейчас я все больше нахожусь в плену каких-то образных восприятий, и мне кажется, что некоторые вещи не нужно строго формулировать, а нужно их показать в определенном преломлении через образы. И тогда до сознания людей это сможет дойти гораздо проще.

– Вы пользуетесь мировым признанием в области физического материаловедения (впрочем, и не только). Какие вы предвидите открытия в этой области физики и вообще в науке? Не отойдет ли естественная наука на второй план по сравнению с гуманитарными науками или чем-то иным?

Иллюстрация П.Чернуского

– Что касается общих, фундаментальных областей науки, то мне кажется, что очень перспективными для людей являются проблемы создания, передачи и преобразования информации. Это очень важная вещь, которой принадлежит большое место в будущей деятельности людей.

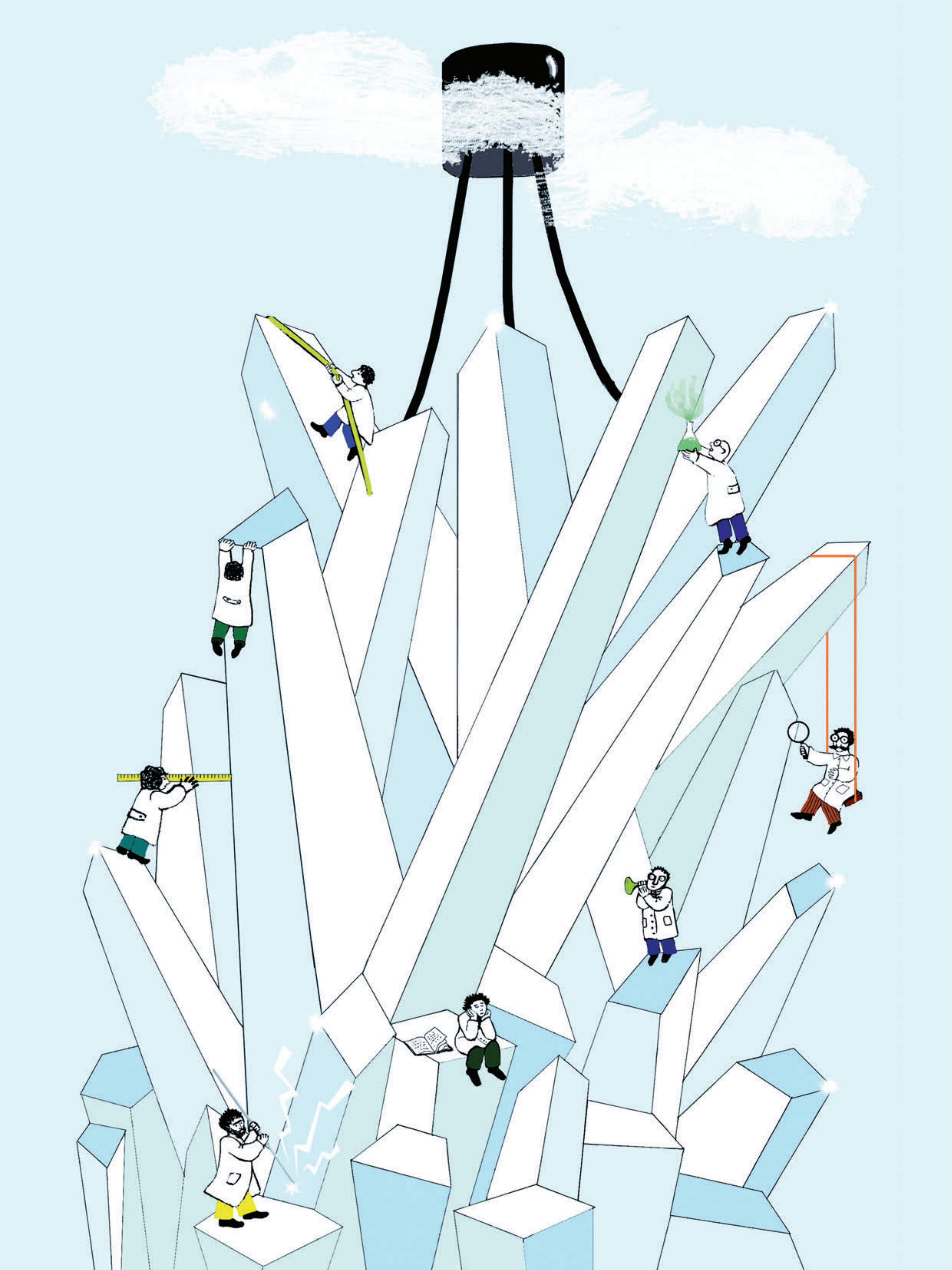
Я думаю, что физическая наука никогда не отойдет на второй план, потому что люди по-прежнему будут работать обоими полушариями. Интуитивная область, которая озаряет искусство и гуманитарные науки, будет развиваться, но точное знание и понимание действительности будет продолжаться и расширяться.

– Юрий Андреевич, уже более 20 лет вы возглавляете журнал «Квант». Какие надежды с ним связываете?

– Как раньше, так и сейчас я продолжаю связывать с этим журналом надежду, что среди его юных читателей появятся высоко талантливые люди, которые профессионально займутся физикой и смогут пойти дальше нас, дальше моего поколения и меня лично.

– Наконец, что бы вы хотели пожелать читателям нашего журнала?

– Прежде всего, я хочу пожелать читателям находить в материалах журнала глубокие и основательные закономерности физической науки. Фактически, я желаю молодым людям как можно более глубокого понимания нашей науки физики. Мы живем для того, чтобы это сделать, и я надеюсь, что это произойдет.



Парадоксы транзистора

Ю.НОСОВ

Прошлый год был объявлен годом физики. Сто лет тому назад в немецком журнале «Annalen der Physik» появились три статьи 26-летнего Альберта Эйнштейна – о теории относительности, квантовой теории фотоэффекта и теории броуновского движения, – которые обозначили поворот в развитии физики и обессмертили имя их автора. Теперешних историков и журналистов в тех публикациях более всего поражает их неожиданность, смелый разрыв с господствовавшими представлениями и традициями, парадоксальность. Оригинальность собственно научных результатов в дальнейшем дополнилась еще и огромным количеством афоризмов, анекдотов, парадоксов, которые великий физик «надиктовал» за 76 лет жизни. С его легкой руки парадоксальность стала «фирменным знаком» физиков-теоретиков: таковыми должны были отныне стать их гипотезы и теории, поведение и высказывания.

В некотором роде, за этим угадывалась парадоксальность самой жизни, не всегда нами замечаемая. Оказалось, что и в технической деятельности, казалось бы строго детерминированной и предсказуемой, неожиданностей, случайностей, парадоксов ничуть не меньше, чем при расшифровке таинств Природы. Парадоксально ведет себя не только «техника», но и «техники», словно устанавливается некая мистическая связь между создателем и его созданием – они притягиваются и отталкиваются одновременно, великолепные находки и горькие потери идут бок о бок.

Ярчайшая иллюстрация к сказанному – история создания транзистора. Однако неизбежен вопрос: в наше время, когда человечество овладевает наноэлектроникой и компьютерными технологиями, можно ли отыскать хоть что-то полезное в той давней истории? Даже 80-е годы прошлого века популяризаторы называют «компьютерным средневековьем», так стоит ли копать еще глубже? Авторитетные историки убеждают, что «история ничему не учит...»; однако это лишь половина цитаты, далее следует «...а только наказывает за незнание ее уроков» (В.Ключевский). История великих открытий всегда дает много больше, чем это видится даже самому проницательному взгляду.

Транзистор – детище полупроводников, и хотя «полупроводниковая сага» началась еще в 1833 году (М.Фарадей), в течение целого столетия обнаруживаемые в этой сфере явления оставались непредсказуемыми, невоспроизводимыми и необъяснимыми. Лишь после разработки квантовой теории полупроводников (А.Вильсон, 1931 г.) началось их подлинно научное исследование: обнаружили, что переносчиками электричества в них являются не только электроны, но и подобные им положительно заряженные «дырки»; установили, что незначительные загрязнения кардинально изменяют свойства полупроводников; научились выплавлять достаточно совершенные и чистые полупроводниковые кристаллы. Задолго до этого эмпирически обнаружили, что с помощью полупроводников можно выпрямлять переменный ток (К.Браун, 1874 г.), и с начала XX века стали изготавливать диоды, пригодные для детектирования радиосигналов.

Эти детекторы, состоявшие из крохотного кристаллика и прижатой к нему пружинящей иголочки (рис.1), были немного проще и меньше вакуумных диодов, к тому же на высоких частотах эффективнее их. Естественно возник вопрос: нельзя ли и вакуумный триод – основу всей тогдашней радиоэлектроники – заменить полупроводником? Это был бы переворот, тем более что имелась и подсказка.

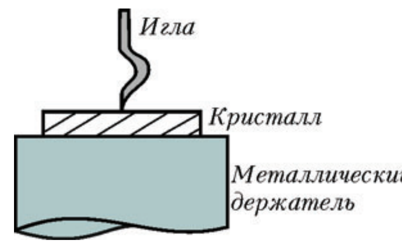


Рис. 1

Еще в 1922 году в Нижегородской радиолаборатории О.В.Лосев, экспериментируя с детекторами, обнаружил, что в некоторых точках кристалла игольчатый контакт проявлял не только детектирующее, но и усиливающее воздействие на радиосигнал. На вакуумный триод это не было похоже, но все-таки на основе открытого эффекта был разработан первый полностью полупроводниковый радиоприемник – за границей его назвали «кристадином Лосева». Лет пять слава кристадина и его создателя гремела по миру, но постепенно сошла на нет, так как игольчатая конструкция оказалась неэффективной и нестабильной, а электронные лампы очень быстро прогрессировали. (Для наших юных читателей заметим, что Олегу Лосеву не было тогда и 19 лет. Окончив школу в Твери, он один, без родителей перебрался в Нижний Новгород. На работу его взяли посыльным без предоставления общежития, так что жил он в здании лаборатории на лестничной площадке перед чердаком и, конечно, впроголодь.)

И вот – первый парадокс в нашем повествовании. В стремлении отыскать усиливающие точки на поверхности кристаллика Лосев исходил из неверного предположения, что всякий элемент с неомической характеристикой (как у детектора) должен обязательно усиливать радиосигналы. Любой мало-мальски грамотный специалист не стал бы ожидать усиления от детектора, но Лосев тогда еще не был специалистом, он исступленно повел свой поиск и... нашел искомое – прекрасное

Иллюстрация М.Сумниной

подтверждение эйнштейновского афоризма о том, что «все с детства знают, что то-то и то-то невозможно, но всегда находится невежда, который этого не знает, онто и делает открытие». Лишь через 30 лет сумели понять, что именно открыл Лосев: оказалось, что случайным образом в некоторых зонах кристаллов образуется подобие транзисторных структур, и, скользя иглой по поверхности, он натыкался на эти зоны. Заграница не знала, что недавний школьник еще не очень силен в науках, и засыпала лабораторию письмами с обращением «Герр профессор» – победителей не судят. Заметим, к тому же, что уже очень скоро Лосев превратился в блестящего физика-экспериментатора и повторно заставил мир говорить о себе, открыв свечение полупроводников, которое позже стало основой для создания светодиодов.

Вернемся, однако, к транзистору. В конце 1930-х годов понимание физики полупроводников позволяло уже вполне осознанно подойти к созданию усилителя – для этого, как говорится, сформировались необходимые объективные условия. Нашелся и подходящий человек – американец У.Шокли. Окончив докторантуру в Массачусетсском технологическом институте, тогдашней «мекке» электронщиков, он поступил на фирму «Белл-Телефон». Блестящее знание квантовой механики и физики твердого тела, понимание задач, стоящих перед фирмой (ведущей в области телеграфно-телефонной аппаратуры и средств связи вообще), дополнялись у Шокли исключительным честолюбием и амбициозностью, без чего настоящего успеха не достичь. И в 1938 году в рабочем журнале 26-летнего Шокли появляется первый «набросок» полупроводникового триода (рис.2). Идея была проста:

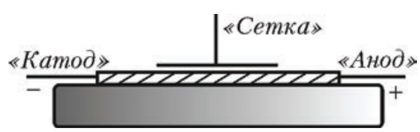


Рис. 2

сделать устройство, максимально похожее на электронную лампу, с тем лишь отличием, что электроны в нем будут протекать по тонкому нитевидному полупроводнику, а не пролетать в вакууме между катодом и анодом. Для управления током полупроводника предполагалось ввести дополнительный электрод (аналог сетки) – прикладывая к нему напряжение разной полярности, можно будет либо уменьшать, либо увеличивать количество электронов в нити, тем самым изменять ее сопротивление и протекающий по ней ток. Все как в радиолампе, но без вакуума, без громоздкого стеклянного баллона, без подогрева катода, эмиттирующего электроны. Вытеснение электронов из нити (или их приток) должно было происходить под влиянием электрического поля, создаваемого между управляющим электродом и нитью, т.е. благодаря полевому эффекту. Для этого нить должна была быть именно полупроводниковой: в металле электронов так много, что никакими полями их не вытеснить, а в изоляторе свободных электронов практически нет, так что и вытеснять нечего.

Идея начала подкрепляться теоретическими расчетами и подготавливаться к экспериментальной проверке, но… грянула вторая мировая война. Шокли был откомандирован в распоряжение Министерства обороны, где проработал до конца войны, занимаясь проблемами, далекими от полупроводников. Похоже сложились судьбы и большинства других исследователей полупроводников. Эта сфера пока еще не сулила конкретных достижений, полезных военным. Кроме детекторов, используемых в радиотехнике, – они оказались буквально в центре грозных военных событий, впервые в истории электроники показав, насколько тесно переплетается общая история с историей техники.

Летом 1940 года после оккупации гитлеровцами Западной Европы Англия оказалась один на один против армады нацистских бомбардировщиков, начавших планомерное разрушение ее обороны и подготовку морского десанта. От краха Англию спасли чудо, решительность нового премьера У.Черчилля и… радары (так на западе называли радиолокаторы). Появившиеся еще в предвоенные годы почти одновременно в СССР, Англии и США, радары позволяли быстро и точно обнаруживать вражеские самолеты и своевременно организовывать противодействие. В небе над Ла-Маншем развернулась грандиозная «битва за Британию», достигшая своего апогея 15 сентября 1940 года (именно эта дата выбита на мемориальном камне в Вестминстерском аббатстве – как важнейшая во всей биографии У.Черчилля), после чего гитлеровцы, потеряв более 1000 самолетов, отказались от идеи вторжения. Отметим, что много лет спустя одна из книг, посвященных тому времени, вышла под весьма выразительным названием: «Как горстка пионеров радиолокации выиграла вторую мировую войну!»

Итак, Англии нужны были радары, радарам – кристаллические детекторы, детекторам – совершенные германий и кремний. Война продвинула эту проблему необычайно быстро, и вскоре германий в значительных количествах появился на заводах и в исследовательских лабораториях – трамплин для прыжка к транзистору был готов. С кремнием, из-за высокой температуры его обработки, поначалу дело шло не так гладко, но через несколько лет тоже успешно разрешилось.

Та война познакомила нас с интересным парадоксом. Гибель огромного количества людей (в том числе ученых и инженеров), уничтожение в невиданных масштабах промышленного и научно-технического потенциала, закрытие многих перспективных исследовательских программ и лабораторий, отрыв талантливой молодежи от высшего образования, общая разруха – все это, казалось бы, должно было отбросить предвоенные научные исследования на предстартовые позиции. Получилось иначе. Вторая мировая стала фактически первой войной, в которой наука и техника по своей значимости для победы выступили на равных с конкретными оружейными технологиями, а иногда и впереди них. При этом многие военные заделы не успели сработать «в реальном времени», но зря не пропали – фактически таковы атомный и ракетный проекты. Таков, как теперь нам очевидно, и транзисторный проект, предпосылки которого были в значительной степени заложены развитием радиолокации во время войны.

Именно в послевоенные годы фирма «Белл» начала формировать программу глобальной связи, т.е. быстрой и надежной связи каждого с каждым в планетарном масштабе. Ее реализация отметилась такими выдающимися достижениями, как спутниковая и оптоволоконная связь, мировое телевидение, цифровизация, Интернет, мобильные телефоны… А первым (и решающим!) шагом на этом славном пути стало создание транзистора.

Аппаратура связи сороковых годов прошлого века использовала для усиления, преобразования и коммутации сигналов в абонентских цепях два элемента: электронную лампу и электромеханическое реле. Они были громоздки, малонадежны, срабатывали медленно и потребляли много энергии. Усовершенствовать этих мастодонтов было бессмысленно – новой идее нужны и новые средства реализации.

Вспомнили о полупроводниках и создали соответствующую исследовательскую группу. Небольшую, всего из 6–7 человек разных специальностей, словно руководствуясь одним из афоризмов А.Эйнштейна о том, что в коллективах изобретателей «могут получиться группы укрывающихся от работы бездельников». Здесь были физик-экспериментатор, электротехник, физхимик, радиотехник, физик-теоретик, а во главе «великолепной семерки» поставили У.Шокли. Естественно, группа начала разрабатывать его предвоенную идею усилителя с эффектом поля, но электроны внутри полупроводника упрямо и, казалось бы, противоестественно игнорировали любые изменения потенциала на управляющем электроде. От высоких напряжений и токов кристаллы даже взрывались, но никак не желали изменять свое сопротивление.

Задумавшись над этим, теоретик Дж.Бардин предположил, что значительная часть электронов на самом деле не гуляет свободно по кристаллу, а застревает в каких-то «ловушках» у самой поверхности полупроводника. Заряд этих «замороженных» электронов экранирует прикладываемое извне поле, не проникающее в объем кристалла. Так в 1947 году в физику полупроводников вошла теория поверхностных состояний. Отметим, что рождение новой теории – как следствия неудач на главном направлении поиска – есть лишь кажущийся парадокс, такова история и многих других открытий.

Теперь, когда, казалось бы, поняли причину неудач, начали более осмысленно реализовывать идею эффекта поля – других идей не было. Занялись различными способами обработки поверхности германия, надеясь устранить «ловушки» электронов: химическое травление, механическая полировка, нанесение на поверхность различных пассиваторов, погружение кристалла в жидкости. Кроме того, постарались максимально локализовать зону управления, для чего один из токоподводов и управляющий электрод изготавливались в виде близко расположенных подпружиненных иголочек (рис.3). Ведущий экспериментатор группы

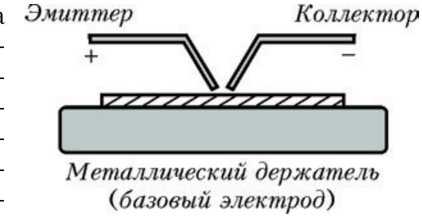


Рис. 3

У.Браттейн имел за плечами почти 15-летний опыт исследования разнообразных полупроводников, был весьма искусен и обладал замечательной интуицией. А кроме того, было известно, что «он мог 25 часов в сутки крутить ручки осциллографа, лишь бы было с кем поболтать». Его слушателем чаще всего оказывался Дж.Бардин, они сдружились, «теория» и «эксперимент» объединились. Однако время шло, а сколько-нибудь существенного результата не появлялось.

Однажды Браттейн, издергавшийся от неудач, сдвинул иголки почти вплотную, мало того, случайно перепутал полярности прикладываемых к ним потенциалов и… увидел на экране осциллографа усиление сигнала. Теперь наступило время теоретика, он сработал почти мгновенно и безошибочно: эффекта поля как не было так и нет, а усиление возникает совсем по иной причине. Во всех предыдущих оценках в расчет принимались только электроны – основные носители тока в германиевом кристалле, а «дырки», неосновные носители, которых было в миллион раз меньше, естественно игнорировались. А оказалось, что в них-то и «зарыта собака»: введение дырок через один электрод (этот процесс назвали инжекцией) вызывает неизмеримо больший ток в другом электроде – так в кристалле происходит усиление тока. И все это на фоне неизменности состояния огромного количества электронов, как бы и не участвующих в процессе. Случайность привела к достижению неизмеримо большему, чем плановая атака, – очередной парадокс.

Через несколько дней группа придумала новому прибору звонкое имя – транзистор, поэтому вся совокупность процессов, протекающих в нем и вызывающих усиление сигналов, стали называть транзисторным эффектом.

На этом, однако, парадоксы транзистора и вокруг него не закончились. Через неделю после замечательного открытия в предрождественский вечер 23 декабря 1947 года состоялась презентация транзистора высшему руководству фирмы. Признание успеха было полным, появилось шампанское, сырой зимний сумрак не помешал всеобщему ликованию, лишь Шокли едва удавалось скрывать разочарование. Да, он раньше других задумался о полупроводниковом усилителе, возглавил группу, просвещал и направлял своих сотрудников, но на соавторство в «звездном» патенте претендовать не мог.

А в звездности изобретения не сомневался никто. Характерно, что и в этом понимании Шокли был дальновиднее других: пока вокруг судили-рядили о замене радиоламп в приемно-усилительной радиоаппаратуре и в телефонии, он уже предчувствовал фантастические перспективы транзистора для осуществления логических операций в зарождающейся компьютерной технике. Но прямого вклада в сделанное открытие он не внес и в патент не попадал – такова бескомпромиссная моральная установка протестантского мира. (Что справедливее, нравственнее, корректнее в признании авторства – абсолютный индивидуализм, отгораживающийся от руководителя, учителя, вдохновителя, или российская общинность, щедрая на одаривание успехом своих коллег, – остается вопросом.)

Не станем, однако, фантазировать, что творилось в душе Шокли, но проявилось это в вулканическом выплеске его творческой энергии. Позднее, вспоминая то время, Шокли говорил о своей «страстной неделе», в течение которой он создал теорию транзистора с $p-n$-переходами, заменившими экзотические иголочки, а в саму новогоднюю ночь изобрел плоскостной транзистор (рис.4). Это уравняло его в правах на открытие транзисторного эффекта с изобретателями точечного транзистора У.Браттейном и Дж.Бардином.

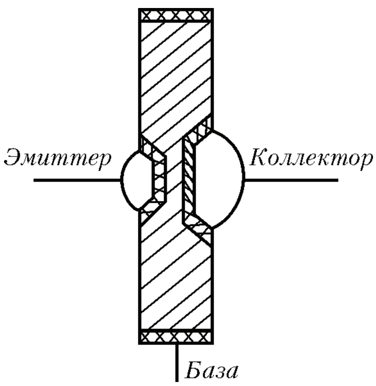


Рис. 4

Через полгода, 30 июня 1948 года в Нью-Йоркской штаб-квартире фирмы «Белл» прошла открытая презентация транзистора. В то время уже началась «холодная война» между США и СССР, поэтому технические новинки прежде всего оценивались военными. Удивительно, но эксперты из Пентагона «приговорили» транзистор к использованию лишь в слуховых аппаратах для старичков, хотя уже через пару лет новый прибор стал незаменимым элементом аппаратуры управления боевыми ракетами. Сейчас это представляется парадоксальным, но тогда близорукость военных спасла транзистор от засекречивания. Парадоксально и то, что презентация осталась почти незамеченной: репортеры изнемогали от нестерпимой жары, а их боссы – от первых заморозков «холодной войны». Все же пара абзацев о транзисторе появилась в «Нью-Йорк Таймс» на 46 странице в разделе «Новости радио» после пространной заметки о возобновлении репортажей некой «несравненной мисс Брукс». Таким было явление миру одного из величайших открытий XX века, а возможно, и всей истории человечества.

Заметим, что вряд ли справедливо обвинять тогдашних экспертов в некомпетентности – представленный им тогда кристаллик германия с прижатыми к нему иголочками (точечный транзистор) прожил лишь 5–7 лет, вскоре его полностью вытеснил плоскостной транзистор, начавший свое триумфальное шествие по миру. И в 1956 году У.Шокли, Дж.Бардин, У.Браттейн были удостоены Нобелевской премии по физике «за исследования полупроводников и открытие транзисторного эффекта».

Поучительно напомнить об одном «зигзаге удачи», который история того времени продемонстрировала нашим ученым. В годы, предшествующие изобретению транзистора, в СССР были достигнуты значительные успехи в создании германиевых и кремниевых детекторов. В этих работах использовалась оригинальная методика исследования приконтактной области путем введения в нее дополнительной иглы, вследствие чего создавалась конфигурация, в точности повторяющая точечный транзистор (см. рис.3). Как позднее вспоминали, иногда при измерениях выявлялись и транзисторные характеристики, но их отбрасывали как случайные и неинтересные аномалии. Мало в чем наши исследователи уступали американским специалистам, не было у них лишь одного – нацеленности на транзистор, и великое открытие выскользнуло из рук.

Однако были просмотры и у американцев. Еще на подступах к транзистору в ноябре 1947 года Дж.Бардин, пытаясь избавиться от «ловушек», изобрел простенькую структуру, в которой металлическая игла прижималась к окислу, покрывающему полупроводник. По оценкам автора, под окислом мог образоваться тонкий инверсный слой дырочной проводимости (на электронном полупроводнике), и в нем несложно было бы реализовать усиление на основе эффекта поля. Фактически был изобретен простейший МОП-транзистор (металл – окисел – полупроводник), который с середины 1960-х годов стал основой больших и сверхбольших интегральных схем. Вот и совсем неожиданный парадокс: не будь тогда изобретен точечный транзистор, вполне вероятно, что был бы «доведен до ума» МОП-транзистор, а от него – полшага до МОП-микросхем, которые появились бы лет на 15 раньше. Но все произошло, как произошло, и изобретение Дж.Бардина так и осталось «бумажным патентом», а действующий МОП-транзистор изобрели в 1960 году другие.

Отметим, однако, что славы Дж.Бардину хватило и без этого: в 1951 году он ушел из фирмы «Белл», занялся теорией сверхпроводимости и в 1972 году вместе с двумя своими учениками был отмечен Нобелевской премией «за разработку теории сверхпроводимости», став, таким образом, единственным в истории ученым, дважды удостоенным Нобелевской премии по физике.

Что же касается «транзисторной саги», то изобретение точечного транзистора, а вслед за ним и биполярного плоскостного транзистора стимулировали такую активность по всем направлениям, которая вскоре привела к созданию силовой электроники (транзисторы и мощные диоды), солнечных элементов, фоточувствительных ПЗС-матриц для видеокамер, плоскостных дисплеев, светодиодов и гетеролазеров (Ж.Алферов, 1968 г.) – словом, всего того многообразия приборов, которые составляют основу современной электроники и информатики.

Трехсекторная модель налогообложения

В.МАЛЫХИН

РЕАЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ ОБЫЧНО СЛИШКОМ СЛОЖНЫ, чтобы можно было изучать их непосредственно. Тогда исследователь создает модель реального явления. С одной стороны, модель должна быть не очень сложной, чтобы ее можно было легко изучить. С другой стороны, модель должна отражать существенные черты реального явления, иначе выводы, сделанные на основе изучения модели, нельзя будет распространить на само реальное явление.

Трехсекторная модель налогообложения придумана мною для иллюстрации следующих важных моментов: а) бюджет государства формируется главным образом из налогов граждан; б) соотношения доходов различных социальных групп определяют общую социально-экономическую ситуацию в стране; в) бизнесмены являются движущей активной силой экономики.[1]

Задача о разведчике

Вот любопытная задача-шутка (шутка ли?):

В засекреченном городке около 100000 человек работают на трех крупных заводах, других заводов в городке нет. Разведчику удалось раздобыть следующие данные о текучести кадров: за год из каждой тысячи работающих с завода A 20 человек переходят на завод D и 15 человек переходят на завод C; аналогичное происходит с заводами D и C – см. рисунок 1; при этом городок живет стабильной спокойной жизнью уже много лет. В этих условиях разведчик сумел установить численность рабочих на каждом заводе. Сумеете ли сделать это вы?

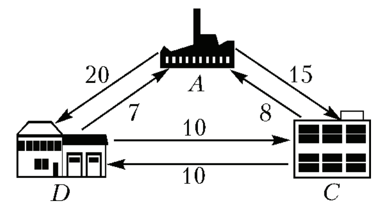


Рис. 1

Давайте попробуем. Фраза «...городок живет стабильной спокойной жизнью...» является ключевой. Она означает, что численность работающих на каждом заводе стабилизировалась и, таким образом, сколько с каждого завода за год увольняется рабочих, столько же и принимается на него. Отсюда, обозначая численность рабочих на заводе A через a, на заводе D – через d и на заводе C – через c, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 35a/1000 = 7d/1000 + 8c/1000, \\ 17d/1000 = 20a/1000 + 10c/1000, \\ 18c/1000 = 15a/1000 + 10d/1000, \\ a + d + c = 100000, \end{cases}$$

решив которую, и находим ответ: $a = 17600$, $d = 43600$, $c = 38800$.

Описание трехсекторной модели налогообложения

Все трудоспособное население представим тремя группами: бизнесмены, рабочие, бюджетники. Бизнесмены – это те, кто организуют производство, платят работ-

[1] *Малыхин В.И. Трехсекторная модель налогообложения. – М.: Каталог, 2003.*

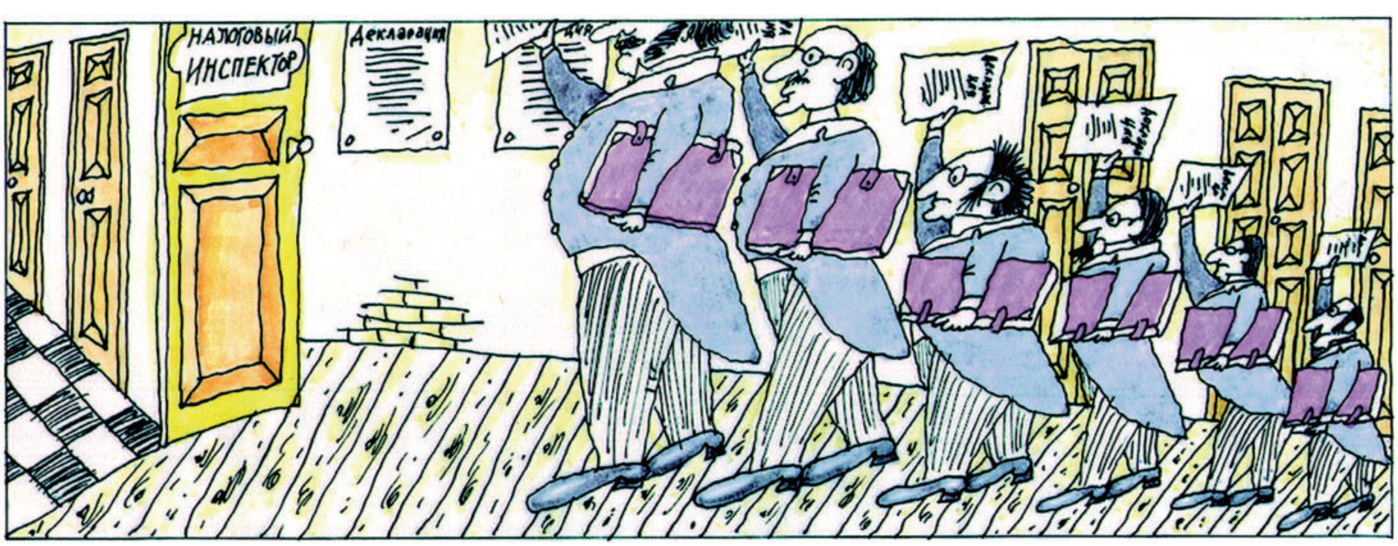


Иллюстрация В.Иванюка

никам на этом производстве зарплату, имеют с этого производства достаточно большие доходы и платят с них налоги по довольно большой ставке – это как бы сумма всех налогов: с прибыли, единый социальный налог и т.д. Рабочие – это лица наемного труда, они получают свою зарплату от бизнесменов и своим трудом обеспечивают им их доходы. Бюджетники – это учителя, врачи, военные, государственные чиновники и т.п., они получают зарплату от государства. Бюджет государства складывается только из налогов бизнесменов, ни рабочие, ни бюджетники налогов не платят (это небольшое упрощение, не очень существенное). Определенная доля государственного бюджета тратится на общегосударственные нужды: оборону, импорт необходимых товаров и т.п., остальная часть бюджета идет на зарплату бюджетникам.

Обозначим долю во всем трудоспособном населении бизнесменов через b (businessmen), рабочих – w (workers), бюджетников – s (state people). Далее, обозначим доход бизнесменов через z_b, зарплату рабочих – z_w, зарплату бюджетников – z_s.

Описанные группы населения не являются совершенно неподвижными: часть бизнесменов разоряется и переходит в рабочие или бюджетники, есть и обратное движение. Эти процессы перехода из группы в группу можно изобразить размеченным графом на рисунке 2, наподобие того, что изображен на рисунке 1.

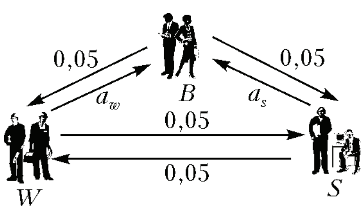


Рис. 2

При построении этого графа приняты некоторые упрощения. Так, многочисленные исследования свидетельствуют, что в развитых экономиках ежегодно примерно десятая часть бизнесменов разоряется и переходит, по нашей схеме, в рабочие или бюджетники. Примем, что соответствующие интенсивности текучести равны 0,05, т.е. 5% бизнесменов ежегодно переходят в рабочие и 5% – в бюджетники. Интенсивности переходов из рабочих в бюджетники и наоборот будем считать равными также 5%. Интенсивности же переходов из рабочих и бюджетников в бизнесмены будем считать пропорциональными кратности доходов бизнесменов z_b и соответствующих зарплат z_w, z_s. Кроме того, интенсивности этих переходов пропорциональны еще и отношению численностей соответствующих групп. Так что окончательно примем $a_w = 0{,}001wz_b/(bz_w)$, $a_s = 0{,}001sz_b/(bz_s)$.

Нижеследующие уравнения назовем *условиями стабильности численности социальных групп*:

$$\begin{gathered} 0{,}1b = a_w w + a_s s, \\ (a_w + 0{,}05)w = 0{,}05b + 0{,}05s, \\ (a_s + 0{,}05)s = 0{,}05b + 0{,}05w, \\ b + w + s = 1. \end{gathered} \tag{1}$$

Последнее уравнение означает, что все трудоспособное население принято за единицу.

Обозначим через t ставку налога с дохода, который платят бизнесмены, тогда всего они платят tbz_b. Как указывалось выше, это единственный источник государственного бюджета. Пусть f – доля государственного бюджета, идущая на зарплату бюджетников, тогда всего бюджетникам выплачивается из бюджета $ftbz_b$. Обозначим через l коэффициент, показывающий во сколько раз суммарный доход бизнесменов превышает суммарную зарплату рабочих (таким образом, l показывает степень эксплуатации рабочих – чем больше l, тем больше степень эксплуатации). Подчеркнем, что ни рабочие, ни бюджетники не платят налогов. В рамках рассматриваемой модели это можно объяснить так: бюджетники не платят, потому что зарплату им платит государство, так что налоги можно удерживать сразу же из зарплаты; рабочие же не платят, потому что зарплату им платят бизнесмены, так что можно считать, что бизнесмен платит налог и за «своих» рабочих. В модели зарплата рабочего не учитывается в доходе «его» бизнесмена. Кстати, это соответствует действительности – сейчас и бюджетники и рабочие получают зарплату, из которой подоходный налог уже вычтен.

Теперь запишем *условия сбалансированности зарплат и налогов*:

$$\begin{gathered} z_b + z_w + z_s = 1, \\ ftbz_b = sz_s, \\ bz_b = lwz_w. \end{gathered} \tag{2}$$

Первое условие показывает, что в рассматриваемой схеме в зарплатах важны лишь их относительные величины, т.е. во сколько раз зарплата (доход) в одной группе больше (или меньше) зарплаты в другой. Второе условие показывает, что зарплата бюджетников составляет f-ю часть всего бюджета государства, который складывается только из налоговых отчислений бизнесменов.

Наконец, сформулируем *условия социальной справедливости*:

$$l \le 10, \quad 0 \le t \le 0{,}5, \quad 2 \le z_b/z_w \le 20, \quad 2 \le z_b/z_s \le 20. \tag{3}$$

Поясним только смысл неравенств $2 \le z_b/z_w$, $2 \le z_b/z_s$. Доход бизнесменов до уплаты налога равен z_b, а после уплаты налога составляет $(1 - z)z_b$, так что если t будет близко к 0,5, то доход бизнесменов до уплаты налога должен, по крайней мере, двукратно превышать зарплату рабочего или бюджетника, тогда доход бизнесмена после вычета налога во всяком случае будет не меньше зарплаты «его» рабочего.

Исследование трехсекторной модели

Параметров модели слишком много для их однозначного определения. Поэтому при исследовании модели некоторые параметры нужно задать:

Доля госбюджета, расходуемая на оплату труда бюджетников	$f \le 0{,}5$
Ставка налога с бизнесменов	$t \le 0{,}5$
Доход бизнесмена/зарплата рабочего	≤ 20

Доход бизнесмена / зарплата бюджетника ≤ 20
Степень эксплуатации рабочих $l \le 10$

Далее поступим так: составим компьютерную программу, которая будет перебирать тройки (b,w,s), в сумме равные единице, с каким-нибудь небольшим шагом; для этого нужны два вложенных друг в друга цикла; при шаге 0,1 нужно перебрать 100 троек, при шаге 0,01 – 10000 троек, что вполне приемлемо для современных компьютеров. Каждую тройку будем подставлять в систему (1) и находить параметры a_w и a_s, а по ним – отношения z_b/z_w и z_b/z_s. (Таким образом, мы действуем не как в задаче о разведчике – по данным о текучести находим численность групп, а наоборот – по численности групп рассчитываем, какая для этого должна быть текучесть.) По тройке (b,w,s) и вычисленным отношениям z_b/z_w и z_b/z_s найдем параметры t и l, а затем проверим выполнение условий (3) социальной справедливости. Если эти условия выполняются, то анализируемую тройку назовем *допустимой* – при такой социально-экономической структуре в обществе нет излишнего напряжения. Так, при шаге 0,01, $f = 0{,}5$, $t \le 0{,}5$, $2 \le z_b/z_w \le 14$, $2 \le z_b/z_s \le 14$, $l \le 10$ получим 14 допустимых социально-экономических структур общества и их параметры – см. таблицу 1.

Таблица 1

№ структ.	Доля бизн. b	Доля рабоч. w	Доля бюдж. s	Нал. биз-нов t	Зар-та биз./раб. z_b/z_w	Зар-та биз./раб. z_b/z_s	Степень эк.раб. l
1	0,15	0,46	0,39	0,479	2,84	10,85	0,92
2	0,15	0,47	0,38	0,406	2,04	12,47	0,65
3	0,16	0,44	0,40	0,500	4,96	10,00	1,80
4	0,16	0,45	0,39	0,421	3,95	11,57	1,40
5	0,16	0,46	0,38	0,357	3,02	13,30	1,05
6	0,17	0,43	0,40	0,443	6,44	10,63	2,54
7	0,17	0,44	0,39	0,373	5,27	12,29	2,04
8	0,18	0,41	0,41	0,473	9,64	9,64	4,23
9	0,18	0,42	0,40	0,395	8,16	11,25	3,50
10	0,18	0,43	0,39	0,333	6,81	13,02	2,85
11	0,19	0,40	0,41	0,424	11,88	10,17	5,64
12	0,19	0,41	0,40	0,355	10,17	11,88	4,71
13	0,19	0,42	0,39	0,299	8,62	13,74	3,90
14	0,20	0,40	0,40	0,320	12,50	12,50	6,25

Проверим, например, расчет 10-й структуры. Имеем $b = 0{,}18$ и $w = 0{,}43$, значит, $s = 0{,}39$. Из системы (1) имеем $a_w = (b+s-w)/(20w)$, $a_s = (b+w-s)/(20s)$. Подставляя сюда значения b, w, s, получим

$$a_w = (0{,}18 + 0{,}39 - 0{,}43)/(20 \cdot 0{,}43) = 0{,}0162\,,$$

$$a_s = (0{,}18 + 0{,}43 - 0{,}39)/(20 \cdot 0{,}39) = 0{,}0282\,.$$

Далее вспоминаем, что $a_w = 0{,}001wz_b/(bz_w)$, $a_s = 0{,}001sz_b/(bz_s)$, $t = bz_b/(fsz_s)$, $l = bz_b/(wz_w)$, откуда находим $z_b/z_w = 6{,}81$, $z_b/z_s = 13{,}02$, $t = 0{,}333$, $l = 2{,}85$.

Приведем еще один список допустимых структур – см. таблицу 2. При том же шаге 0,01 положим $f = 0{,}4$, $t \le 0{,}3$, $2 \le z_b/z_w \le 18$, $2 \le z_b/z_s \le 20$, $l \le 8$ и получим только 7 допустимых социально-экономических структур общества.

Таблица 2

№ структ.	Доля бизн.	Доля рабоч.	Доля бюдж.	Нал. биз-нов	Зар-та биз./раб.	Зар-та биз./раб.	Степень эк.раб.
1	0,17	0,47	0,36	0,288	2,31	18,36	0,84
2	0,18	0,46	0,36	0,257	3,40	19,44	1,33
3	0,19	0,44	0,37	0,270	5,89	18,04	2,54
4	0,20	0,42	0,48	0,286	9,07	16,62	4,32
5	0,20	0,43	0,37	0,244	7,57	18,99	3,52
6	0,21	0,41	0,38	0,259	11,24	17,45	5,76
7	0,21	0,42	0,37	0,221	9,52	19,94	4,76

Модель может быть использована и для исследования некоторых других вопросов. Например: какова минимальная ставка налога при $f = 0{,}5$, $2 \le z_b/z_w \le 20$, $2 \le z_b/z_s \le 20$, $l \le 10$?

Несложные эксперименты с моделью на компьютере показывают, что при $t = 0{,}2$ допустимы 2 структуры, а при $t = 0{,}18$ возможна только одна социально-экономическая структура – см. таблицу 3.

Таблица 3

№ структ.	Доля бизн.	Доля рабоч.	Доля бюдж.	Нал. биз-нов	Зар-та биз./раб.	Зар-та биз./раб.	Степень эк.раб.
1	0,21	0,42	0,37	0,177	9,52	19,94	4,76

Стационарные и переходные состояния общества в трехсекторной модели

Все структуры таблиц 1–3 описывают равновесные или стационарные состояния общества – состояния, в которых основные параметры, характеризующие общество, остаются постоянными. Теперь представим, что правительство, поддавшись требованиям бюджетников, увеличило им зарплату в 2 раза. Если ничего больше не предпринять, то равновесие в модели нарушится. В самом деле, a_s уменьшится в 2 раза и система условий (1) перестанет выполняться. Численность бюджетников начнет увеличиваться. Переход к новому равновесному или стационарному состоянию общества называется *переходным режимом*. Такой режим описывается дифференциальными уравнениями, но наша модель слишком проста и не позволяет составить и исследовать такие уравнения. Мы можем лишь попробовать найти подходящую структуру, которая будет представлять новое равновесное состояние. Так, предположим, что увеличение зарплаты бюджетникам в 2 раза произошло в структуре 4 из первой таблицы. Подходящими структурами окажутся те, у которых отношение z_b/z_s значительно уменьшится, т.е. структуры с номерами 3,8,11. Но это лишь соображения качественного порядка…

Пифагор

А.ВАСИЛЬЕВ

Древнегреческий математик Пифагор (около 570 – около 500 до н.э.) является основателем философского учения, исходившего из представления о числе как основе всего существующего. Считается, что пифагорейцы признавали только рациональные числа. Однако памятная монета Уганды, посвященная Пифагору, представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник, гипотенуза которого никоим образом не находится в рациональном отношении к катетам ($\sqrt{2} = 1,4142\ldots$). Такой треугольник, разумеется, подчиняется знаменитой теореме Пифагора, но не описывается рациональными пифагоровыми триадами (например, 3–4–5 или 5–12–13).

Пифагорейцы и сами, по-видимому, понимали, что не все удается описать рациональными числами, но пытались скрыть это важное обстоятельство, как противоречащее гармоническому устройству мира. Действительно, как можно провозглашать число мерой всех вещей, коли сама эта мера толком не определена. Математики наших дней полагают, что множество действительных чисел образуют множество рациональных и множество иррациональных чисел. При этом если рациональные числа можно пересчитать, то иррациональные числа не поддаются такому пересчету – их гораздо больше. К таким числам относятся, например, основание натурального логарифма $e = 2{,}71828\ldots$ или число $\pi = 3{,}141596\ldots$

Ладно если бы понятия иррациональных и рациональных чисел затрагивали лишь математические проблемы, но теория чисел в те времена касалась самих основ человеческого существования. Так, Пифагор полагал, что единица является всеобщим первоисточником, что мужские числа нечетны, а женские, наоборот, четны. Простые числа в представлении пифагорейцев являлись мужественными, а композитные, т.е. составленные из простых чисел, – женоподобными.

Знание – сила: столь глубокие познания в точных науках, разумеется, не могли безвозмездно передаваться широкой общественности. Еще жрецы Древнего Египта держали в повиновении простой люд способностью предсказать солнечное затмение или предусмотреть засушливый год. Именно у египтян Пифагор перенял склонность к созданию закрытых мистических обществ.

В Египет Пифагор приехал сложившимся ученым в возрасте около 35 лет. Равно как и сейчас, времена тогда в Средиземноморье были очень неспокойными. На десятый год пребывания Пифагора в Египте персидский царь Камбиз II вероломно напал на Египет и в качестве трофея увез математика в Вавилон. Не менее пяти лет Пифагор провел в вавилонском плену, но и здесь он не терял времени даром. У местных специалистов он перенял их древние ритуалы, достиг совершенства в точных и изящных науках и в 520 году до н.э. возвратился в родной Самос.

Увы, нет пророков в своем отечестве. Не найдя понимания у соплеменников, Пифагор отбыл в южную Италию, которая представлялась тогда грекам чуть ли не краем света. Здесь Пифагор основал философскую и религиозную школу, адепты которой полагали математику лежащей в основе всего сущего. Конечно, занятия математикой в понятии пифагорейцев сильно отличались от таковых в современных представлениях. Никто из них даже не пытался формулировать или разрешать математические проблемы. Скорее, они интересовались самими принципами математического мышления, концепциями чисел и геометрических фигур, абстрактной идеей доказательства. Пифагор, в частности, полагал, что все связи и взаимодействия в подлунном мире сводятся к соотношению простых чисел, и эти соотношения он пытался установить.

Наиболее крупным достижением Пифагора явилось доказательство теоремы, названной впоследствии его именем. Следует понимать, однако, что формулировка «квадрат гипотенузы в прямоугольном треугольнике равен сумме квадратов его катетов» вовсе не предполагала тогда перемножения чисел самих на себя. Речь шла скорее о геометрических квадратах, построенных на катетах этого треугольника, и последующем разрезании их на части так, чтобы они заполнили квадрат, построенный на гипотенузе. Пифагорейцы знали о правильных многогранниках (регулярных телах), хотя, может быть, только о первых трех из пяти, и задолго до Декарта пытались решать алгебраические уравнения геометрическими методами.

Этические и философские взгляды Пифагора привлекали большое число последователей. На юге Италии возник целый ряд пифагорейских общин, исповедовавших культ математики и придававших этому культу мистическую окраску. Закрытые сообщества во все времена не только привлекали адептов, но и вызывали яростное неприятие. К концу жизни Пифагора общины его последователей оказались втянуты в политическую борьбу и, в конце концов, были рассеяны и истреблены.

Пифагор умер в изгнании, но дело его жизни продолжается и сейчас. Теория чисел в настоящее время образует один из важнейших разделов математики, а математика, как и предполагалось пифагорейцами, стала основой всех естественных наук.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 апреля 2006 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1–2006» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1981» или «Ф1988». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1981 и М1984 предлагались на 25-м Уральском турнире юных математиков, задача М1983 предлагалась на 26-м Турнире городов, задача М1989 – на 5-м Турнире математических боев памяти А.Н.Колмогорова.

Задачи М1981 – М1990, Ф1988 – Ф1997

М1981. В клетках таблицы 11×11 расставлены все натуральные числа от 1 до 121. Дима посчитал произведение чисел в каждой строке, а Саша – произведение чисел в каждом столбце. Могли ли они получить одинаковые наборы из 11 чисел?

С.Берлов

М1982. На экране написано натуральное число. Каждую секунду к написанному в данный момент числу прибавляется произведение цифр его десятичной записи. Докажите, что начиная с некоторого момента число на экране не будет изменяться.

А.Белов

М1983. Сколько существует разных способов разбить число 2006 на натуральные слагаемые, которые приблизительно равны? Слагаемых может быть одно или несколько. Числа называются приблизительно равными, если их разность не больше 1. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

А.Толпыго

М1984. На плоскости отмечены 1000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдется не более 1000000 равнобедренных треугольников с вершинами в этих точках.

С.Берлов, И.Богданов

М1985. Четырехугольник $ABCD$, у которого нет параллельных сторон, описан около окружности с центром O. Середины сторон AB, BC, CD, DA обозначены K, L, M, N соответственно. Докажите, что если точки O, K, M лежат на одной прямой, то точки O, L, N также лежат на одной прямой.

А.Заславский, М.Исаев, Д.Цветов

М1986. Докажите, что для $2n$ действительных чисел $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_n$ выполняется неравенство

$$\left(x_1 + x_2 + \ldots x_n + y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right)^2 \ge$$
$$\ge 4n\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\right).$$

П.Самовол, М.Аппельбаум

М1987. Даны икосаэдр и додекаэдр с равными расстояниями от центра до ребра. У какого из многогранников больше объем?

А.Заславский

М1988. Для каких натуральных чисел a найдутся такие целые неотрицательные числа k, m, n, что если выписать друг за другом числа a^n и a^m в десятичной записи, то получится десятичная запись числа a^k?

В.Сендеров

М1989. В королевстве N городов и r дорог, каждая дорога соединяет два города, и из любого города можно добраться до любого по дорогам. В городах живут гонцы. В начале каждого года один из городов отправляет во все соседние (т.е. соединенные с ним дорогами) города по гонцу (в таком городе должно быть достаточное для этого количество гонцов). Если в каждом городе гонцов недостаточно, то движения гонцов прекращаются.

а) Пусть через несколько лет движение гонцов прекратилось. Докажите, что если города, отправляющие гонцов, выбирать по-другому, то движение гонцов все равно прекратится; при этом конечное количество гонцов в каждом городе не зависит от выбора городов.

б*) Пусть через несколько лет в каждом городе оказалось столько же гонцов, сколько было изначально. Какое наименьшее количество гонцов может быть в королевстве?

И.Богданов

М1990*. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны BC за точку C выбирается точка X. Окружности, вписанные в треугольники ABX и ACX, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что все прямые PQ проходят через некоторую точку, не зависящую от положения точки X.

Л.Емельянов

Ф1988. Кролик бежит по прямой с постоянной скоростью v_1, за ним по плоскости гонится лиса. Скорость лисы v_2 постоянна по величине и все время направлена в ту точку, где находится в данный момент кролик. В некоторый момент расстояние между участниками забега составляет L, а угол между векторами их скоростей равен α. Найдите ускорение лисы в этот момент.

А.Лисов

Ф1989. В системе на рисунке 1 ось верхнего блока закреплена, а сам этот блок склеен из двух блоков разных радиусов – один из радиусов ровно вдвое больше другого. Радиусы подвижных блоков подобраны так, что свисающие концы нити вертикальны. Масса маленького груза справа наверху равна M; на нити, намотанной на малый диаметр верхнего блока, закреплен груз массой $3M$; масса нижнего груза $2M$. Систему вначале удерживают, затем отпускают, и начинается движение. Найдите ускорения подвижных блоков. Во сколько раз отличаются угловые ускорения верхнего (двойного) и самого нижнего блоков?

А.Зильберман

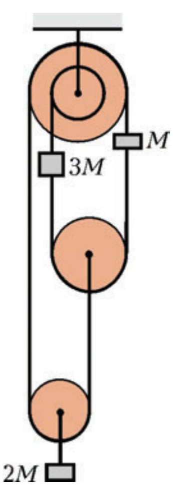


Рис. 1

Ф1990. На тонкой легкой нити к потолку подвешен маленький шарик массой M; период малых колебаний получившегося маятника равен T_0. Шарик отводят в сторону и толчком придают ему начальную скорость – такую, что он описывает окружность, лежащую в горизонтальной плоскости. Каким может быть время одного оборота шарика, если нить выдерживает натяжение не более $10\,Mg$?

П.Шаров

Ф1991. В компьютерной модели по дну квадратной коробки площадью 1 м^2 скользят две одинаковые шайбы радиусом 1 см. Скорости шайб по величине все время равны 1 м/с, а направление скоростей меняется случайным образом при столкновениях шайб со стенками коробки и между собой. Оцените, за какое время произойдет 1000 ударов между шайбами. Сколько раз за это время шайбы ударятся о все стенки коробки?

А.Ударов

Ф1992. Цикл Карно *1–2–3–4–1* (рис.2), проводимый с порцией идеального газа, имеет термодинамический КПД η_0. Цикл разделили на два – первый *1–2–4–1* и второй *4–2–3–4* (процесс *4–2* идет при повышении давления и объема газа, и зависимость давления от объема на этом участке линейная). Известен термодинамический КПД первого цикла (*1–2–4–1*), он равен η_1. Найдите аналогичный КПД η_2 второго цикла.

Ц.Карнов

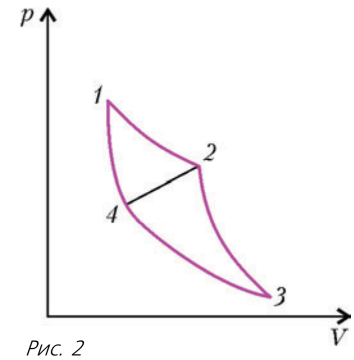


Рис. 2

Ф1993. Из очень тонкой проволоки сделали окружность, припаяли диаметр из такой же проволоки и еще один диаметр – перпендикулярно первому. Середины «диаметральных» проволочек соединили между собой. Один из выводов омметра присоединили к произвольной точке окружности, другой – к диаметрально противоположной ее точке. Во сколько раз отличаются максимальное и минимальное значения показаний прибора?

О.Простов

Ф1994. Параллельные проводящие рельсы расположены горизонтально на расстоянии d друг от друга и помещены в однородное магнитное поле, вектор индукции которого $\vec{B}_0$ направлен перпендикулярно их плоскости. Рельсы замкнуты резистором большого сопротивления R. Вдали от резистора на рельсах лежит массивный проводящий стержень, он составляет угол 45° с рельсами. С какой силой нужно действовать на стержень в горизонтальном направлении, чтобы он скользил вдоль рельсов поступательно с постоянной скоростью v_0?

З.Рафаилов

Ф1995. Параллельно друг другу подключены две катушки, индуктивности которых 1 Гн и 2 Гн, и конденсатор емкостью 100 мкФ. Конденсатор в данный момент заряжен до напряжения 200 В, а через катушки текут одинаковые (и одинаково направленные) токи по 0,1 А. Найдите максимальный ток через катушку индуктивностью 1 Гн. Оцените, через какое время напряжение конденсатора изменит знак на противоположный (можно было бы посчитать и точно, но расчет получился бы довольно громоздким). Элементы цепи считайте идеальными.

Р.Александров

Ф1996. Конденсатор емкостью C и катушка индуктивностью L соединены друг с другом, и в получившемся контуре происходят колебания. В тот момент, когда напряжение конденсатора составляло U_1, а через катушку тек ток I_1, параллельно контуру подключили резистор сопротивлением R. Какое количество теплоты выделится в резисторе? Какой заряд протечет через катушку, начиная с этого момента?

А.Зильберман

Ф1997. К точка *А* и *Б* схемы, изображенной на рисунке 3, подключают источник переменного напряжения 36 В, 50 Гц. Что покажет вольтметр с большим внутренним сопротивлением, если включить его между точками *Б* и *В*? Конденсаторы в схеме имеют емкости, например, 1 мкФ. Диоды можно считать идеальными. Придумайте также хорошее название для этой схемы.

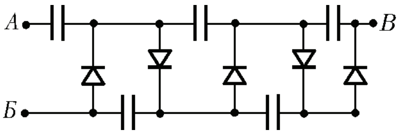


Рис. 3

У.Множителев

Решения задач М1961 – М1965, Ф1973 – Ф1982

М1961. *В параллелограмме ABCD нашлась точка Q такая, что* $\angle AQB + \angle CQD = 180°$. *Докажите равенства углов:* $\angle QBA = \angle QDA$ *и* $\angle QAD = \angle QCD$ *(рис. 1).*

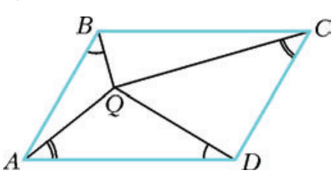


Рис. 1

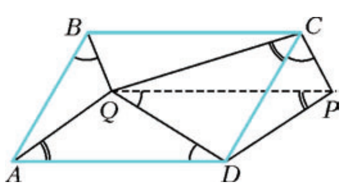


Рис. 2

Треугольник *ABQ* параллельно перенесем на вектор $\overline{BC}$, и новое положение точки *Q* обозначим через *P* (рис. 2). Ввиду условия задачи, около четырехугольника *QCPD* можно описать окружность. Но тогда

$$\angle DCP (= \angle QBA) = \angle PQD = \angle QDA,$$

а также

$$\angle QCD = \angle QPD = \angle QAD,$$

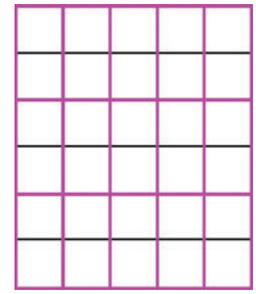
т.е. утверждение доказано.

В.Произволов

М1962. *Клетчатый прямоугольник полностью покрыт костями домино (каждая кость покрывает две соседние клетки). Назовем покрытие оригинальным, если для любого другого покрытия положение хотя бы одной кости совпадает с положением какой-либо кости оригинального покрытия. Для каких прямоугольников существует оригинальное покрытие?*

Ответ: оригинальное покрытие имеют те и только те прямоугольники, у которых вдоль одной стороны размещается четное число клеток, а вдоль другой – нечетное (иными словами – это все прямоугольники размером $2m \times (2n-1)$ клеток, где m и n – натуральные числа).

Сначала докажем, что для таких прямоугольников действительно имеется оригинальное покрытие. Для этого просто опишем такое покрытие. Оно очень простое: надо все кости расположить так, чтобы длинная их сторона была параллельна четной стороне прямоугольника (на рисунке дан пример оригинального покрытия прямоугольника 6×5). Чтобы убедиться, что это покрытие в самом деле оригинальное, расположим прямоугольник так, чтобы нечетные стороны были горизонтальны (как на рисунке). Рассмотрим любое другое покрытие этого прямоугольника костями домино и выделим кости, которые примыкают к нижней стороне прямоугольника. Так как эта сторона – нечетная, то хотя бы одна кость непременно будет расположена вертикально. Но тогда она совпадет с какой-то из костей оригинального покрытия, примыкающей к нижней стороне прямоугольника. Таким образом, указанное покрытие и впрямь оригинальное.



Осталось доказать, что если обе стороны прямоугольника – четные, то оригинального покрытия не существует. Иначе говоря, для любого покрытия можно указать другое покрытие – такое, что ни одна его кость не совпадет ни с одной костью исходного покрытия. Пусть прямоугольник с четными сторонами покрыт каким-то образом костями домино. Мысленно разобьем его на квадраты 2×2 (так как обе стороны четные, то это возможно). А теперь каждый такой квадрат покроем двумя костями. Это можно сделать двумя способами. Докажем, что хотя бы для одного из этих способов положение каждой из костей *не совпадет* ни с одной из костей исходного покрытия. Рассуждаем «от противного». Допустим, это не так и для любого из двух возможных расположений двух костей в квадрате 2×2 хотя бы одна из костей совпадет с какой-то костью исходного покрытия. Сориентируем квадрат так, чтобы одна из его сторон была горизонтальна, другая – вертикальна. Уложим на него две кости для начала *горизонтально.* Так как в исходном покрытии, согласно предположению, хотя бы одна кость совпадает с какой-то из этих двух костей, то можно сделать вывод: в исходном покрытии имеется кость, расположенная в этом квадрате *горизонтально.* Теперь уложим на тот же квадрат две кости по-иному – *вертикально.* Тогда, согласно тому же предположению, в исходном покрытии имеется кость, расположенная в этом квадрате *вертикально.* Таким образом, в одном и том же квадрате 2×2 исходного покрытия есть кость, расположенная вертикально, и есть кость, расположенная горизонтально. Но это, очевидно, невозможно. Противоречие!

Итак, для любого исходного покрытия мы можем разбить прямоугольник с четными сторонами на квадраты 2×2, а затем в каждом таком квадрате так уложить две кости, что ни одна из них не совпадет ни с одной из костей исходного покрытия. Отсюда следует, что оригинального покрытия не существует.

И.Акулич

М1963. *Натуральные числа x, y, z* $(x > 2,\ y > 1)$ *удовлетворяют равенству* $x^y + 1 = z^2$. *Докажите, что число x имеет не менее 8 различных натуральных делителей.*

Достаточно доказать, что число x имеет не менее 3 различных простых делителей.

Из $p^t+1=z^2$, где $t>1$, легко вывести, что $p=2$. Именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *При $z>3$ число $d=z^2-1$ имеет не менее 2 различных простых делителей.*

Для доказательства достаточно при четном z воспользоваться равенством

$$d=(z+1)(z-1),\text{ где }(z+1,z-1)=1,\quad z-1>1,$$

а при нечетном z – равенством

$$d=4\cdot\frac{z+1}{2}\cdot\frac{z-1}{2},\text{ где }\left(\frac{z+1}{2},\frac{z-1}{2}\right)=1,\ \frac{z-1}{2}>1.$$

Пусть теперь число $(z-1)(z+1)$, где $z>1$, имеет ровно 2 различных простых делителя. Тогда в случае $(z-1,z+1)=1$ имеем $\left(p^{\alpha}\right)^y-\left(q^{\beta}\right)^y=2$, т.е. $a^y-b^y=$ $=2$, где $y>1$. Но $a^y-b^y=(a-b)\left(a^{y-1}+\ldots+b^{y-1}\right)\geq$ $\geq(a-b)\left(2^{y-1}+1\right)\geq(a-b)\cdot3\geq3$. Значит, $(z-1,z+1)=$ $=2$, откуда либо $z-1=2p^{\alpha y}$ и $z+1=2^{\beta y-1}$, либо $z-1=2^{\beta y-1}$ и $z+1=2p^{\alpha y}$. В первом случае $2^{\beta y-2}-p^{\alpha y}=$ $=1$, во втором $p^{\alpha y}-2^{\beta y-2}=1$.

Лемма 2. *Уравнение*

$$2^u-1=w^v,$$

где $u>1$, $v>1$, не имеет решений в натуральных числах.

Доказательство. Поскольку ни при каком целом c число c^2+1 не делится на 4, число v нечетно. Поэтому $2^u=(w+1)A$, где $A=w^{v-1}-w^{v-2}+\ldots-w+1$ – сумма нечетного числа v нечетных слагаемых. Значит, и само число A нечетно. Но $(w+1)A=2^u=w^v+1>w+1$. Следовательно, A – больший единицы делитель числа 2^u, что невозможно.

Лемма 3. *Уравнение*

$$2^u+1=w^v,$$

где $v>1$, имеет единственное решение в натуральных числах: $(u,v,w)=(3,2,3)$.

Доказательство. Единственность этого решения в случае четного v следует из леммы 1, а отсутствие решений в случае нечетного v – из рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве леммы 2.

Из лемм 2 и 3 получаем $y=2$, $\beta y=5$, что невозможно.

Замечание 1. Доказанное утверждение о наличии у числа x трех различных простых делителей можно обобщить следующим образом.

Предложение. Пусть число y разлагается в произведение n отличных от 1 натуральных чисел. Тогда x имеет не менее $n+2$ различных простых делителей.

Доказательство основано на следующих важных утверждениях, которые часто бывают полезны при решении задач по теории чисел.

Лемма 4. *Пусть $a\geq2$, p – нечетное простое число. Тогда число a^p-1 имеет хотя бы один простой делитель, не являющийся делителем числа $a-1$.*

Лемма 5. *Пусть $a\geq2$, p – простое число и выполнено хотя бы одно из неравенств $a\neq2$ и $p\neq3$. Тогда число a^p+1 имеет хотя бы один простой делитель, не являющийся делителем числа $a+1$.*

Доказательство этих лемм можно прочесть в решении задачи М1867 («Квант» №6 за 2003 г.).

Сформулированная в том же решении теорема Биркгофа–Вандивера позволяет усилить Предложение: *если $y=p_1^{\alpha_1}\ldots p_m^{\alpha_m}$, то x имеет не менее $1+(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_m+1)$ различных простых делителей.*

Замечание 2. Накладывая на числа задачи дополнительные ограничения, можно получить и более сильные следствия, нежели содержащееся в ее формулировке. Именно, нетрудно доказать следующие утверждения.

Если число $y-2$ составное, то x имеет не менее 12 различных натуральных делителей.

Если к тому же число y не является числом Ферма[1], *то x имеет не менее 16 различных натуральных делителей.*

Доказательство этих утверждений также опирается на леммы 4 и 5.

Несколько по-иному доказывается следующее утверждение.

Пусть в условиях задачи $(x+1,y)=1$. Тогда x имеет не менее 16 различных натуральных делителей.

Замечание 3. Утверждение, близкое к утверждению задачи, справедливо и в случае равенства $2x^y+1=z^2$ ($x>2$, $y>1$). Именно, в этом случае *натуральное число x, $x\neq12$, имеет не менее 8 различных натуральных делителей*. Доказательство этого факта близко к решению задачи. Ситуация $x=12$ возможна: $2\cdot12^2+1=17^2$. Отметим, что при $y=2$ рассматриваемый случай оказывается случаем уравнения Пелля $z^2-2x^2=1$. Об этих очень интересных и важных уравнениях можно прочесть, например, в статье В.Сендерова и А.Спивака «Уравнения Пелля» («Квант» №3 за 2002 г.).

В.Сендеров

М1964. *Вневписанная окружность неравнобедренного треугольника ABC касается стороны AB в точке C' и продолжений сторон AC, BC в точках B', A'. Прямые AA' и BB' пересекаются в точке K. Докажите, что K лежит на описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда радиусы окружностей ABC и $A'B'C'$ равны.*

Пусть радиусы окружностей равны, O – центр описанной окружности, O' – центр вневписанной. Тогда, так

[1] *Т.е. $y\neq2^{2^k}+1$, где $k\geq0$. Отметим, что случай $k=0$ можно не рассматривать, поскольку уравнение $x^3+1=z^2$ при $x>2$ не имеет решений в натуральных числах. В самом деле, некоторые рассуждения из решения нашей задачи сразу сводят это уравнение к следующим: $u^3-2v^3=1$, $2v^3-u^3=1$, где $u,v\in\mathbf{N}$. Однако, как доказал еще Л.Эйлер методом спуска, первое из получившихся уравнений не имеет решений, а второе имеет лишь одно решение (1, 1) – что немедленно и приводит к единственному решению (2, 3) в натуральных числах уравнения $x^3+1=z^2$. Утверждение о неразрешимости этого уравнения при $x>2$ можно переформулировать несколько неожиданным образом: ни при каком $n>1$ сумма $1^3+\ldots+n^2$ не является кубом натурального числа (докажите красивый факт – эквивалентность этих утверждений – самостоятельно!).*

как $\angle A'O'A = \angle O'AO = \angle B + \angle A/2$, четырехугольник $A'O'AO$ – равнобедренная трапеция и $AA' = OO'$. Значит, в треугольниках $AA'C$ и $BB'C$ $CA' = CB'$ и $AA' = BB'$, но $AC \neq BC$. Следовательно, $\angle CAA' + \angle CBB' = 180°$.

Обратно: если K лежит на описанной окружности, то $AA' = BB'$. Предположим, что радиусы окружностей не равны, и отложим на отрезках OA и OB точки X, Y такие, что $AX = BY = OA'$. Так как $O'X = AA' = BB' = O'Y$ и $OX = OY$, треугольники $OO'X$ и $OO'Y$ равны, т.е. $\angle AOO' = \angle BOO'$, что для неравнобедренного треугольника неверно.

Отметим, что для равнобедренного треугольника утверждение задачи остается верным, в чем нетрудно убедиться прямой проверкой.

А.Заславский

М1965. *С крыши дома спущена лестница, содержащая n ступенек. С каждой ступеньки можно перешагнуть на соседнюю; кроме того, с самой верхней ступеньки можно переступить на крышу, а с самой нижней – на землю. На каждой ступеньке укреплен указатель-стрелка, направленный вверх либо вниз. В начальный момент на одной из ступенек лестницы стоит человек. В соответствии с указателем он передвигается на соседнюю ступеньку, и сразу после этого указатель меняет направление на противоположное. Со следующей ступеньки человек опять переступает на соседнюю в соответствии с ее указателем, и сразу после этого указатель также меняет положение на противоположное. Далее человек снова и снова переходит со ступеньки на ступеньку по таким же правилам. Какое наибольшее число шагов может сделать человек, пока не сойдет с лестницы на землю или на крышу?*

Ответ: максимальное возможное число шагов равно $\frac{n(n+1)}{2}$ (включая сюда и тот шаг, которым человек сошел с лестницы).

Прежде всего докажем, что человек не может находиться на лестнице бесконечно долго, т.е. ему рано или поздно придется сойти с лестницы на землю или на крышу.

Используем метод «от противного». Допустим, человек никогда не выйдет за пределы лестницы, даже если сделает бесконечное число шагов. Тогда на какую-то ступеньку A он наступит *бесконечное* число раз. Так как направление указателя при каждом «наступлении» на ступеньку меняется на противоположное, то при «наступлениях» на ступеньку A указатель бесконечное число раз будет показывать вверх. Поэтому, ступая в соответствии с указателем, человек бесконечное число раз наступит на ступеньку, соседнюю сверху со ступенькой A. Рассуждая таким же образом, можно сделать вывод, что он бесконечное число раз наступит на ступеньку, соседнюю с ней, и так далее, вплоть до самой верхней ступеньки. Но самое позднее при *втором* «наступлении» на самую верхнюю ступеньку он с нее будет вынужден подняться вверх на крышу (указатель-то каждый меняет направление!). Противоречие.

Но насколько долго сможет человек «продержаться» на лестнице? Пусть человек, стартуя с какой-то ступеньки, сделал в соответствии с правилами некоторое число шагов и последним из этих шагов покинул лестницу. Не нарушая общности, можно считать, что человек сошел с лестницы *на крышу,* т.е. покинул лестницу *через верхнюю ступеньку*.

Рассмотрим любую ступеньку, которую человек посетил неоднократно (хотя бы дважды). Так как сразу после ухода с нее указатель-стрелка на ступеньке меняет направление, то шаги, которые делал человек с этой ступеньки, попеременно направлены то вверх, то вниз, т.е. количества шагов, сделанные с какой-либо ступеньки вверх и вниз, различаются не больше чем на 1. Обозначим это рассуждение Р1. Далее, если *последний* шаг с какой-либо ступеньки человек сделал вверх, то суммарное число шагов вниз с этой ступеньки *не больше,* чем суммарное число ходов вверх (докажите это самостоятельно). Это рассуждение обозначим Р2.

А теперь докажем следующее утверждение.

У1. *С k-й снизу ступеньки (для всех* $1 \le k \le n$*) человек сделал не больше (k – 1) шагов вниз и не больше k шагов вверх.*

Доказательство проведем индукцией по k.

Для $k = 1$ (т.е. самой нижней ступеньки) утверждение практически очевидно.

Пусть для $k = m$ утверждение верно, т.е. человек с m-й ступеньки снизу сделал не больше $(m - 1)$ шагов вниз и не больше m шагов вверх. Докажем, что со следующей, $(m + 1)$-й ступеньки он сделал не больше m шагов вниз. Для этого между m-й и $(m + 1)$-й ступеньками мысленно проведем *границу* и посмотрим, сколько раз человек пересек ее снизу вверх и сколько – сверху вниз. Снизу вверх – это ясно: не больше m раз. А сверху вниз? Рассмотрим два случая.

1) «Стартовая» ступенька находится выше границы, т.е. человек начал движение и финишировал над границей. Но тогда ясно, что он одинаковое число раз пересек границу сверху вниз и снизу вверх. Поэтому число шагов сверху вниз через границу не больше m.

2) «Стартовая» ступенька находится ниже границы, т.е. человек начал движение под границей, а финишировал над границей. Но тогда он пересек границу снизу вверх на 1 раз больше, чем сверху вниз. Поэтому число шагов сверху вниз через границу не больше $(m - 1)$, что, конечно, тоже не больше m.

Итак, количество шагов с $(m + 1)$-й ступеньки вниз не больше m. Тогда, в силу Р1, число шагов с $(m + 1)$-й ступеньки вверх не больше $(m + 1)$.

Утверждение У1 доказано: с k-й снизу ступеньки человек сделал не больше $(k - 1)$ шагов вниз и не более k шагов вверх, а всего – не более $(2k - 1)$ шагов.

Теперь проведем аналогичный анализ, отсчитывая ступеньки сверху, т.е. докажем второе утверждение.

У2. *С k-й сверху ступеньки (для всех* $1 \le k \le n$*) человек сделал не больше k шагов вниз и не больше k шагов вверх.*

Доказательство также можно провести индукцией по k (проделайте это, воспользовавшись утверждением Р2).

Получается, что с k-й сверху ступеньки человек сделал не больше k шагов вниз и не более k шагов вверх, а всего – не более $2k$ шагов.

Чего же мы достигли? Мы ограничили сверху число шагов с каждой ступеньки, причем двумя способами. Например, число шагов с самой нижней ступеньки согласно У1 не превышает 1, а согласно У2 не превышает $2n$, т.е. «в целом» не превышает $\min(1, 2n)$ – так мы будем обозначать наименьшее из двух чисел. Для второй снизу ступеньки число шагов не больше $\min(3, 2n - 2)$, для третьей – не больше $\min(5, 2n - 4)$ и так далее, вплоть до самой верхней ступеньки, для которой число шагов не больше $\min(2n - 1, 2)$. Ясно, что если перебирать ступеньки снизу вверх, то первое число в скобках будет монотонно возрастать, а второе – уменьшаться. Поэтому для какой-то «нижней части» ступенек минимальное значение – первое, а для остальных («верхней части») – второе. Определимся, где граница «водораздела». Рассмотрим k-ю ступеньку снизу. Ее номер, если отсчитывать сверху, равен $(n - k + 1)$, поэтому можно записать, что с нее сделано не больше $\min(2k - 1, 2n - 2k + 2)$ шагов. Если приравнять оба числа в скобках, то получим $2k - 1 = 2n - 2k + 2$, откуда найдем «граничное значение»: $k_{\text{гр}} = \frac{2m+3}{4}$. Таким образом, если номер ступеньки (снизу) $k < \frac{2n+3}{4}$, то $\min(2k-1, 2n-2k+2) = 2k-1$, если же $k > \frac{2n+3}{4}$, то $\min(2k-1, 2n-2k+2) = 2n-2k+2$. Понятно, что равенство $k = \frac{2n+3}{4}$ невозможно, так как $\frac{2n+3}{4}$ – не целое число (числитель нечетный!).

Пусть n – четное число, т.е. $n = 2m$ (m – натуральное). Тогда $k_{\text{гр}} = \frac{2n+3}{4} = m + \frac{3}{4}$. Посему для $k \le m$ число шагов с k-й ступеньки не превышает $(2k - 1)$, т.е. при возрастании k возрастает от 1 до $(2m - 1)$ с увеличением на 2, а для $k \ge m+1$ число шагов с k-й ступеньки не превышает $2n - 2k + 2 = 4m - 2k + 2$, т.е. при возрастании k убывает от $2m$ до 2 с уменьшением на 2. Итого, суммарное число шагов, сделанных со всех ступенек, равно

$$S = \left(1+3+\ldots+(2m-1)\right)+\left(2m+(2m-2)+\ldots+2\right) =$$

$$= 1+2+\ldots+2m = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Пусть теперь n – нечетное число, т.е. $n = 2m - 1$ (m – натуральное). Тогда $k_{\text{гр}} = \frac{2n+3}{4} = m + \frac{1}{4}$. Поэтому для $k \le m$ число шагов с k-й ступеньки не превышает $(2k - 1)$, т.е. при возрастании k возрастает от 1 до $(2m - 1)$ с увеличением на 2, а для $k \ge m+1$ число шагов с k-й ступеньки не превышает $2n-2k+2-4m-2k+2$, т.е. при возрастании k убывает от $(2m-2)$ до 2 с уменьшением на 2. Итого, суммарное число шагов, сделанных со всех ступенек, равно

$$S = \left(1+3+\ldots+(2m-1)\right)+\left((2m-2)+(2m-4)+\ldots+2\right) =$$

$$= 1+2+\ldots+(2m-1) = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Как видно, и для четного, и для нечетного n суммарное число шагов, сделанных человеком, не превышает $\frac{n(n+1)}{2}$. Остался последний штрих: для каждого n привести пример начального расположения указателей и исходного местонахождения человека на лестнице.

Примеры эти различны для четного и нечетного n.

Если n – четное (т.е. $n = 2m$), то следует на m нижних ступеньках установить указатели вверх, а на m верхних – вниз. «Стартовая» ступенька – любая из двух, находящихся вблизи центра лестницы (т.е. m-я или $(m + 1)$-я снизу).

Убедимся, что число шагов здесь равно именно $\frac{n(n+1)}{2}$. Это сделать «в лоб» не так-то просто, поэтому вновь применим индукцию по n с увеличением 2, начиная от наименьшего значения 2.

Пусть лестница имеет только $n = 2$ ступеньки. Изобразим схематично, к чему это приведет. Удобнее условно расположить лестницу горизонтально (считая, что земля находится слева, а крыша – справа). При этом ступеньки (а также землю и крышу) изобразим в виде прямоугольников, и в каждом из них будем показывать направления стрелок-указателей (естественно, если стрелка показывает вправо, то это считается вверх, а если влево – то вниз). Знаком «+» отметим текущее положение человека. Тогда для $n - 2$ получится вот что:

	Земля	*1-я ст.*	*2-я ст.*	*Крыша*
Исходное положение		$\rightarrow$	+ $\leftarrow$	
После 1-го шага		+ $\rightarrow$	$\rightarrow$	
После 2-го шага		$\leftarrow$	+ $\rightarrow$	
После 3-го шага		$\leftarrow$	$\leftarrow$	+

Как видно, для двух ступенек число шагов действительно равно $\frac{2(2+1)}{2} = 3$. При этом после схода человека с лестницы на крышу все указатели-стрелки остались направлены вниз.

Пусть то же верно для $m = k$ ступенек, т.е. через $\frac{k(k+1)}{2}$ шагов человек сойдет на крышу, причем после этого все стрелки будут направлены вниз. Добавим к такой лестнице еще 2 ступеньки: одну снизу и одну сверху, причем на нижней ступеньке указатель направим вверх, а на верхней – вниз. Посмотрим, что получится. Так как впервые человек покинет пределы лестницы из k ступенек только на $\frac{k(k+1)}{2}$-м шаге, то до тех пор человек никак не затронет добавленные ступеньки, и лишь $\frac{k(k+1)}{2}$-м шагом станет на верхнюю из них (она «появилась» вместо крыши). Поэтому можно изобразить, как теперь выглядит вся картинка:

Земля	1-я ст.	1-я ст.	…	$(k+1)$-я ст.	$(k+1)$-я ст.	Крыша
	$\rightarrow$	$\leftarrow$	…	$\leftarrow$	+ $\leftarrow$	
	Добавленная ступенька снизу	«Прежняя» лестница из k ступенек стала серединой «наращенной» лестницы			Добавленная ступенька сверху	

Далее, как видим, на лестнице $(k + 1)$ стрелок подряд (на всех ступеньках, кроме самой нижней) направлены вниз, и человек стоит на самой верхней ступеньке. Очевидно, теперь он, в соответствии со стрелками, сделает подряд $(k + 1)$ шагов вниз, перебравшись на самую нижнюю ступеньку, и вот что получится:

Земля	1-я ст.	2-я ст.	…	$(k+1)$-я ст.	$(k+2)$-я ст.	Крыша
	+ $\rightarrow$	$\rightarrow$	…	$\rightarrow$	$\rightarrow$	

Теперь все $(k + 2)$ стрелок указывают вверх, и человек стоит на самой нижней ступеньке. Ясно, что, сделав следующие $(k + 2)$ шагов, он выйдет на крышу. Таким образом, если нашу лестницу из k ступенек нарастить еще двумя (сверху и снизу), то всего человек сделает $\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)+(k+2)=\frac{(k+2)(k+3)}{2}$ шагов, что и требовалось.

С четными n разобрались.

Если же n – нечетное (т.е. $n = 2m - 1$), то здесь стартовая ступенька – центральная ступенька лестницы (m-я снизу, она же m-я сверху). Указатели на ступеньках, находящихся ниже стартовой, первоначально показывают вверх, а на ступеньках, находящихся выше стартовой, – вниз. Направление указателя, расположенного на стартовой ступеньке, значения не имеет. Для определенности направим его тоже вниз и аналогичной индукцией по n убедимся, что человек сделает ровно $\frac{n(n+1)}{2}$ шагов.

Сначала – случай с наименьшим $n = 1$. Здесь все настолько очевидно, что рисовать схему и не надо: после $\frac{1(1+1)}{2}=1$ хода человек окажется на крыше, а стрелка на единственной ступеньке будет показывать вниз.

Пусть то же верно для $n = k$ ступенек, т.е. и для нечетного k через $\frac{k(k+1)}{2}$ шагов человек сойдет на крышу, причем после этого все стрелки будут направлены вниз. Добавим к такой лестнице еще 2 ступеньки: одну снизу и одну сверху, причем на нижней ступеньке указатель направим вверх, а на верхней – вниз. И получится та же картина, что и для четного k, т.е. в дальнейшем рассуждения здесь абсолютно такие же, что и для предыдущего случая, так что повторяться не будем.

Итак, пример приведен, все в порядке.

И.Акулич

Ф1973. *Камень бросают под углом α к горизонту, придав ему начальную скорость v_0. Точка падения камня на H ниже точки броска. Вектор скорости камня в полете поворачивается. Найдите максимальное и минимальное значения угловой скорости этого вращения. Земля, как известно, плоская; считайте, что воздуха на ней нет.*

Полное ускорение летящего камня все время направлено вниз и равно g. Вектор скорости $\vec{v}$ увеличивается по модулю за счет касательной проекции ускорения a_t, а поворачивает его нормальная составляющая ускорения a_n. При этом за малый интервал времени τ угол поворота составляет $\Delta\varphi = a_n\tau/v$ и угловая скорость вращения равна $\omega = \Delta\varphi/\tau = a_n/v$. Обозначим угол между вертикалью и направлением вектора скорости через β. Горизонтальная составляющая вектора скорости все время одна и та же, тогда $\sin\beta=\frac{v_0\cos\alpha}{v}$ и нормальная составляющая ускорения равна $a_n = g\sin\beta=\frac{gv_0\cos\alpha}{v}$. Значит, угловая скорость вращения вектора скорости составляет

$$\omega=\frac{a_n}{v}=\frac{gv_0\cos\alpha}{v^2}.$$

Максимальная величина этой угловой скорости получается в верхней точке траектории, где скорость тела минимальна – там есть только ее горизонтальная составляющая:

$$\omega_{\max}=\frac{g}{v_0\cos\alpha}.$$

Минимальное значение угловой скорости получится в самой нижней точке траектории, где квадрат полной скорости максимален и составляет $v^2=v_0^2+2gH$, при этом

$$\omega_{\min}=\frac{gv_0\cos\alpha}{v_0^2+2gH}.$$

З.Рафаилов

Ф1974. *По гладкому горизонтальному столу может двигаться куб массой M. На нем находится другой куб – поменьше, его масса m. На кубы действуют горизонтальные силы: F – на нижний и f – на верхний. Силы эти параллельны, приложены к центрам кубов и направлены в одну сторону. Найдите ускорения кубов. Коэффициент трения между верхним и нижним телами μ. Кубы двигаются поступательно, не вращаясь.*

Направления сил трения – со стороны верхнего куба на нижний и со стороны нижнего куба на верхний – определяются простым соотношением: если $F/M > f/m$, то верхний куб при отсутствии трения отставал бы от нижнего; значит, на него сила трения действует «вперед» – в сторону силы f, а на большой куб действует сила трения, направленная назад. В этом случае при достаточно большом коэффициенте трения кубы едут вместе с ускорением

$$a=\frac{F+f}{M+m}.$$

Условие совместного движения кубов: $\mu \ge \mu_1$, где μ_1 – «граничное» значение коэффициента трения, определяется условием

$$\frac{F-\mu_1 mg}{M}=\frac{f+\mu_1 mg}{m},$$

откуда находим

$$\mu_1=\frac{Fm-fM}{mg(M+m)}.$$

Если коэффициент трения меньше этого «граничного» значения, то ускорения кубов находятся совсем просто: нижний куб движется с ускорением

$$a_M=\frac{F-\mu_1 mg}{M},$$

верхний – с ускорением

$$a_m=\frac{f+\mu_1 mg}{m}.$$

Если же $F/M<f/m$, то верхний куб пытается обогнать нижний, направления сил трения меняются на противоположные, ускорение при совместном движении не изменяется, а при недостаточно большом трении ускорения составляют

$$a_M=\frac{F+\mu_2 mg}{M} \text{ и } a_m=\frac{f-\mu_2 mg}{m},$$

при этом «граничное» значение коэффициента трения равно

$$\mu_2=\frac{fM-Fm}{mg(M+m)}.$$

Р.Александров

Ф1975. *В системе, изображенной на рисунке 1, грузы имеют одинаковые массы, блоки и нити очень легкие, нити нерастяжимы, свободные их куски вертикальны. Найдите ускорения блоков. Ось самого верхнего блока закреплена.*

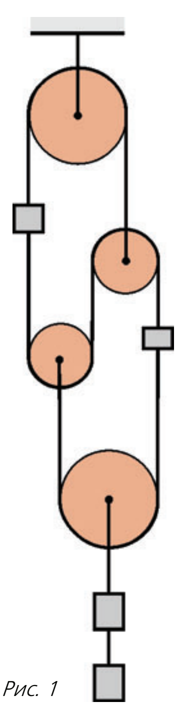


Рис. 1

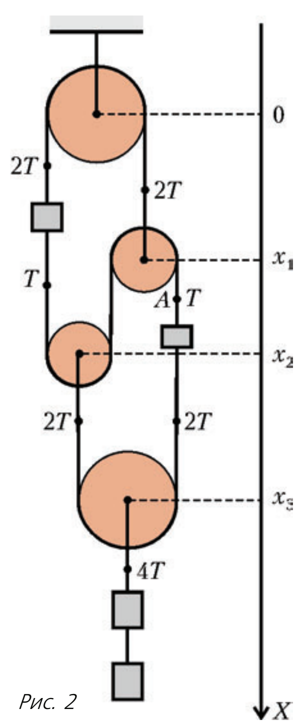


Рис. 2

Обозначим силу натяжения нити в точке A буквой T (рис.2). Тогда легко выразить все остальные силы натяжения – они показаны на чертеже. Направим вниз ось координат X, выберем начало координат на уровне оси верхнего блока, координаты осей остальных блоков обозначим x_1, x_2, x_3. Для того чтобы связать между собой ускорения осей блоков, воспользуемся условием нерастяжимости нити – сумма длин свободных кусков нити не меняется со временем (пока какой-нибудь груз не «упрется» в блок, так что решать задачу нужно быстро...). Выразим сумму длин свободных кусков нити через координаты осей блоков:

$$x_1+x_2+(x_2-x_1)+(x_3-x_1)+(x_3-x_2)=\text{const},$$

или

$$-x_1+x_2+2x_3=\text{const}.$$

Отсюда видна связь между ускорениями осей:

$$a_1=a_2+2a_3$$

(положительное направление – вниз).

Ускорение верхнего груза равно a_1, но направлено против положительного направления оси координат, ускорения двух нижних грузов такие же, как у блока, к которому они привязаны. Ускорение a правого груза также легко выразить через ускорения осей блоков:

$$a=a_1-2a_2.$$

Теперь запишем уравнения динамики для грузов:

$$T-mg=ma_1,$$

$$T+mg=ma=m(a_1-2a_2),$$

$$2mg-4T=2ma_3.$$

Отсюда находим

$$a_1=-0{,}6g,\quad a_2=-g,\quad a_3=0{,}2g.$$

Ускорения a_1 и a_2 направлены вверх, a_3 – вниз. Кстати, сила натяжения нити в точке A составляет $T=0{,}4mg$.

А.Блоков

Ф1976. *Население Земного шара составляет в наши дни приблизительно 4,5 миллиарда человек. Сколько килограммов воздуха приходится на каждого человека?*

Атмосфера довольно тонкая (по сравнению с радиусом Земли), поэтому можно считать, что на площадку S действует сила давления $F=pS$, которая равна силе тяжести mg, где m – масса воздуха над площадкой. (Если бы существенная доля атмосферного воздуха располагалась на больших высотах, нам пришлось бы учитывать уменьшение ускорения тяготения на таких расстояниях.) Тогда массу атмосферы можно найти по формуле

$$m=\frac{pS}{g}=\frac{10^5}{9{,}8}\cdot 4\pi\left(\frac{4\cdot 10^7}{2\pi}\right)^2 \text{ кг} \approx 5\cdot 10^{18} \text{ кг}$$

(мы учли, что длина окружности Земли по экватору составляет 40000 км ровно!).

Значит, на каждого человека приходится

$$\Delta m = \frac{5\cdot 10^{18}}{4{,}5\cdot 10^{9}}\ \text{кг} \approx 10^{9}\ \text{кг}.$$

Довольно много…

А.Мальтусов

Ф1977. *Средняя квадратичная скорость молекул воздуха в комнате 500 м/с, длина свободного пробега 0,01 мм. В данный момент выбранная для наблюдения молекула находится посредине квадратной комнаты площадью 25 $м^2$. Оцените среднее время, необходимое для ее путешествия до одной из стен.*

Если бы частица не меняла направления движения при ударах о другие частицы, она добралась бы до стенки совсем быстро – за время

$$t = \frac{L}{v} = \frac{5\ \text{м}}{500\ \text{м/с}} = 0{,}01\ \text{с}.$$

(Мы взяли «среднее» расстояние до стенки – при площади комнаты 25 квадратных метров расстояние от центра комнаты до ближайшей точки стены 2,5 м, до угла, т.е. до самой удаленной точки этой стены, больше 8,5 м, возьмем для грубой оценки 5 м.)

Подсчитаем теперь, сколько нужно времени для пролета (вернее – проползания) этого расстояния с учетом соударений частиц. Для этого посмотрим, как добавляется к уже пройденному пути L_n очередной «кусочек» $d = 0{,}01$ мм – длина свободного пробега. Воспользуемся теоремой косинусов для нахождения расстояния L_{n+1} от начальной точки путешествия до точки расположения частицы после прохождения $(n+1)$ участка длиной d каждый:

$$L_{n+1}^2 = L_n^2 + d^2 - 2L_n d\cos\varphi,$$

где φ – угол между перемещением $\vec{L}_n$ до прибавления очередного участка и новым отрезком длиной d. Угол φ может быть любым в пределах от 0 до 180°, среднее значение косинуса этого угла получается нулевым – это вполне очевидно, хотя и не очень просто доказать. (Статья, в которой этот вопрос разобран, опубликована примерно 100 лет назад. Попробуйте сами найти автора этой работы по учебникам или справочникам – гарантирую, что получите удовольствие…)

Будем считать, что

$$L_{n+1}^2 = L_n^2 + d^2,$$

тогда

$$L_n^2 = nd^2.$$

Отсюда число ударов при прохождении длинного пути L будет равно $n = L^2/d^2$, а время путешествия составит

$$T = \frac{nd}{v} = \frac{L^2}{dv} = \frac{(5\ \text{м})^2}{10^{-5}\ \text{м}\cdot 500\ \text{м/с}} = 5000\ \text{с}.$$

Учитывая, что длина свободного пробега молекул в воздухе при обычных условиях во много раз меньше, чем 0,01 мм, получаем время путешествия молекулы из центра комнаты до стены просто огромным – на практике даже очень незначительные, практически неощутимые, потоки воздуха, которые всегда происходят в комнате, сокращают время перемешивания в десятки и сотни тысяч раз.

А.Томов

Ф1978. *Медная тонкостенная сфера радиусом R заряжена, полный заряд сферы Q. На расстоянии $R/3$ от центра сферы находится точечный заряд q, а на расстоянии $3R$ от центра сферы помещен точечный заряд $2q$. Найдите потенциалы центра сферы и самой сферы. Какой заряд протечет по тонкому проводу, если этим проводом сферу заземлить?*

Найти потенциал центра сферы совсем просто – его создают два точечных заряда q и $2q$ и заряд Q, «размазанный» по сфере:

$$\varphi_{\text{ц}} = k\frac{q}{R/3} + k\frac{2q}{3R} + k\frac{Q}{R}.$$

Потенциал самой сферы найти чуть труднее, придется немного порассуждать. Действительно, на внутренней стороне сферы собирается заряд $-q$, силовые линии от внутреннего заряда q заканчиваются на внутренней поверхности сферы, заряд наружной поверхности сферы теперь равен $Q+q$. Если мы уберем заряды q и $-q$ внутри сферы, поле снаружи не изменится, не изменится и потенциал сферы. А посчитать его будет совсем просто – теперь внутри сферы поля нет, мы можем сделать расчет для любой внутренней точки, но удобно взять центр. Тогда потенциал сферы будет

$$\varphi_{\text{сф}} = k\frac{2q}{3R} + k\frac{Q+q}{R}.$$

Если мы заземлим сферу, ее потенциал станет равным нулю, так что рассчитать «утекший» заряд Q_x совсем просто:

$$0 = k\frac{2q}{3R} + k\frac{Q+q-Q_x}{R},$$

откуда

$$Q_x = Q + \frac{5}{3}q.$$

Ф.Изиков

Ф1979. *В изображенной на рисунке 1 цепи конденсаторы одинаковы, емкость каждого C = 100 мкФ, резистор имеет сопротивление R = 100 кОм, батарейка с ЭДС $\mathscr{E}$ = 10 В обладает внутренним сопротивлением r = 1 Ом. Цепь замыкают. Какой ток течет по резистору через время τ = 0,1 с после включения, и какой ток в этот же момент течет через батарейку? Какое количество теплоты выделится в резисторе за большое время?*

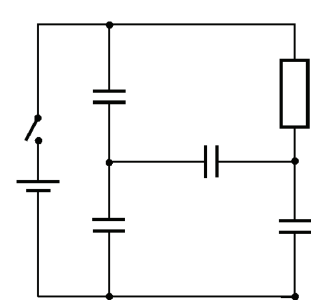


Рис. 1

После замыкания цепи конденсаторы быстро заряжаются, а ток через резистор очень мал. Действительно,

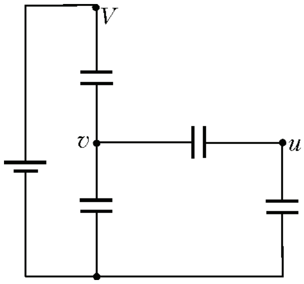


Рис. 2

токи заряда в самом начале определяются маленьким внутренним сопротивлением батарейки: «характерное время заряда» равно произведению общей емкости, можно примерно взять ее равной C, и сопротивления r – получится $rC = 10^{-4}$ с, что намного меньше 0,1 с, заданных в условии задачи. С другой стороны, $RC = 10^5 \cdot 10^{-4}$ с $= 10$ с – это намного больше заданного интервала 0,1 с.

Сделаем расчет – используем метод узловых потенциалов (рис.2). Пусть через резистор протек заряд q, потенциалы узлов обозначим v и u, потенциал верхней точки V – можно считать, что при малом внутреннем сопротивлении и малом токе батарейки $V = 10$ В. Если через резистор протек заряд q, то суммарный заряд обкладок, потенциал которых обозначен u, равен q:

$$C(v-u) + Cu = q .$$

Суммарный заряд обкладок с потенциалом v все время равен нулю:

$$Cv + C(v-u) + C(v-V) = 0 .$$

Из этих уравнений получаем

$$u = \frac{V}{5} + \frac{3q}{5C}, \quad v = \frac{2V}{5} + \frac{q}{5C} .$$

Видно, что при $q = 0$ – за время 0,1 с заряд через резистор практически «не прошел» – потенциал нижнего конца резистора составляет $0{,}2V = 2$ В, верхний вывод резистора имеет потенциал $V = 10$ В. Поэтому ток через резистор в интересующий нас момент равен

$$I_R = \frac{0{,}8V}{R} = 0{,}08 \text{ мА} .$$

За время прохождения заряда q через резистор суммарный заряд двух нижних конденсаторов увеличился на $\left(\frac{3q}{5C} + \frac{q}{5C}\right)C = 0{,}8q$. Ясно, что через батарейку протек именно этот заряд. Он получился меньше заряда q – верхний конденсатор немного разрядился, часть его заряда прошла через батарейку «назад». Значит, ток через батарейку равен

$$I_б = 0{,}8 I_R = 0{,}064 \text{ мА}.$$

Для расчета количества теплоты, которое выделится в резисторе, запишем разность потенциалов на нем как функцию протекшего через него заряда:

$$\Delta\varphi = 0{,}8V - \frac{0{,}6q}{C} .$$

Видно, что это линейная зависимость. Полный протекший за большое время заряд Q обращает разность потенциалов в ноль, откуда получаем

$$Q = \frac{4CV}{3} .$$

Таким образом, выделившееся в резисторе количество теплоты равно

$$W = \frac{1}{2}\Delta\varphi_{нач} Q = \frac{1}{2} \cdot 0{,}8V \cdot \frac{4CV}{3} = \frac{8}{15}CV^2 \approx 5 \text{ мДж} .$$

А.Зильберман

Ф1980. *В одной плоскости с длинным прямым проводом закреплено маленькое сверхпроводящее кольцо из очень тонкого провода. Диаметр кольца d = 1 см, центр кольца находится на расстоянии H = 1 м от провода, индуктивность кольца L = 10 мкГн. По проводу пропускают электрический ток – сила тока быстро возрастает от нуля до I = 10 А. Какой установившийся ток потечет по кольцу? Какая сила при этом будет действовать на кольцо?*

Магнитная индукция поля длинного прямого провода с током I на расстоянии x от него равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} .$$

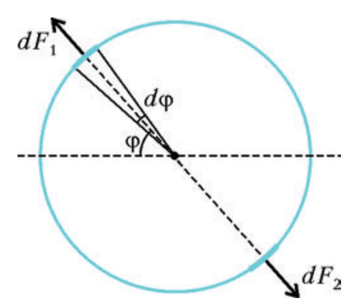
Кольцо маленькое – по сравнению с расстоянием H от провода, для расчета магнитного потока будем считать поле однородным в пределах кольца. Контур сверхпроводящий, поэтому полный магнитный поток через него должен остаться нулевым. Тогда получим

$$LI_к = \frac{\mu_0 I}{2\pi H}\frac{\pi d^2}{4} .$$

Отсюда найдем установившийся ток в кольце:

$$I_к = \frac{\mu_0 I d^2}{8HL} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ А} .$$

Для расчета силы, действующей на кольцо, поле уже нельзя считать однородным – в этом случае сила получилась бы точно равной нулю. Удобно взять малые диаметрально противоположные кусочки кольца (см. рисунок) – проекции сил на направление вдоль провода нас не интересуют, понятно, что в сумме они дадут ноль. В проекции на перпендикулярное к проводу направление получим



$$dF_1 = B_1 I_к R d\varphi, \quad dF_2 = B_2 I_к R d\varphi ,$$

$$(dF_1 - dF_2)\cos\varphi = \mu_0 I I_к R\cos\varphi\, d\varphi \cdot \left(\frac{1}{2\pi(H - R\cos\varphi)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi(H + R\cos\varphi)}\right) = \frac{\mu_0 I I_к R^2\cos^2\varphi\, d\varphi}{\pi\left(H^2 - R^2\cos^2\varphi\right)} .$$

Учтем, что радиус кольца R намного меньше H, и упростим выражение:

$$(dF_1 - dF_2)\cos\varphi \approx \frac{\mu_0 I I_к R^2\cos^2\varphi\, d\varphi}{\pi H^2} .$$

Нужно просуммировать полученные силы по всем частям окружности, тогда полная сила будет

$$F = \frac{\mu_0 I I_к R^2}{\pi H^2}\int \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\mu_0 I I_к R^2}{2H^2} = \\ = \frac{\mu_0^2 I^2 d^4}{64 H^3 L} \approx 2,5\cdot 10^{-15}\ \text{Н}.$$

З.Сильнов

Ф1981. *К источнику переменного напряжения (звуковой генератор) подключена последовательная цепь, состоящая из катушки индуктивностью L = 1 Гн, конденсатора емкостью C = 1 мкФ и резистора сопротивлением R. Будем увеличивать частоту напряжения источника, сохраняя неизменной его амплитуду. При каких условиях напряжение, измеренное идеальным вольтметром на выводах конденсатора, будет при увеличении частоты вначале увеличиваться, а затем уменьшаться? На какой частоте напряжение конденсатора окажется максимальным при R = 100 Ом?*

При малых величинах R будет явно выраженный резонанс, при больших сопротивлениях получится монотонная частотная характеристика. Сделаем расчет.
Амплитуда тока в цепи равна

$$I = \frac{U}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}},$$

а амплитуда напряжения на конденсаторе составляет

$$U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{U}{\sqrt{\left(\omega^2 LC - 1\right)^2 + R^2\omega^2 C^2}}.$$

Исследуем полученное выражение. Максимум получится, если знаменатель имеет минимум в диапазоне частот. Можно исследовать и квадрат знаменателя – возьмем производную по частоте ω и приравняем ее нулю:

$$\left(L^2C^2\omega^4 + \omega^2\left(R^2C^2 - 2LC\right) + 1\right)' = \\ = 4L^2C^2\omega^3 + 2\omega\left(R^2C^2 - 2LC\right) = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{2LC - R^2C^2}{2L^2C^2}.$$

Видно, что при $R > \sqrt{2L/C} \approx 1,4$ кОм максимума для напряжения на конденсаторе не получается.
Для малого сопротивления 100 Ом из выведенной формулы получится частота $\omega_1 = 997,5\ \text{с}^{-1}$ – чуть ниже «чистой» резонансной частоты $\omega_0 = 1000\ \text{с}^{-1}$.

А.Повторов

Ф1982. *Источник света, имеющий очень маленькие размеры, движется вдоль главной оптической оси собирающей линзы с постоянной скоростью v, а линза движется навстречу ему с неизменной скоростью 2v. В некоторый момент скорость изображения оказалась по величине равной v (все три скорости заданы относительно неподвижной системы отсчета). Найдите увеличение, которое дает линза в этот момент. С каким ускорением движется в этот момент изображение? Изображение получают на экране, расположенном перпендикулярно главной оптической оси линзы, фокусное расстояние линзы F.*

Речь идет об изображении на экране – задача при этом упрощается, не нужно рассматривать случаи мнимых изображений. Ясно, что стоит «пересесть на линзу»: в этом случае источник движется со скоростью $3v$ в сторону линзу, а скорость изображения либо равна $3v$ и направлена в сторону от линзы, либо равна v – в зависимости от исходного направления движения.
В первом случае очевидно, что расстояние от источника до линзы в интересующий нас момент составляет $2F$, размер изображения равен размеру источника, т.е. увеличение линзы равно

$$\Gamma = -1.$$

Во втором случае придется немного посчитать. Из формулы линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

следует, что

$$\frac{-d'}{d^2} = \frac{f'}{f^2},$$

где «штрихом» обозначена производная по времени. Расстояние от линзы до источника отсчитывается в противоположную сторону, значит, $d' = -3v$. Если скорость изображения равна v, то $f = d/\sqrt{3}$, и увеличение в этом случае равно

$$\Gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(Кстати, и первый случай с равными скоростями можно было анализировать при помощи полученной формулы, но там было легко догадаться и так.)
Для расчета ускорения запишем в удобном виде выражение для f:

$$f = \frac{dF}{d - F} = F + \frac{F^2}{d - F}.$$

Первая производная по времени равна

$$f' = -\frac{F^2 d'}{(d - F)^2}$$

(можно было использовать эту формулу и в первой части решения!). Вторая производная по времени дает

$$f'' = -\frac{2F^2 d'^2}{(d - F)^3}$$

– мы учли, что ускорение источника равно нулю. Для первого случая (скорость изображения равна $3v$) получим ускорение изображения

$$f'' = -\frac{18v^2}{F},$$

для второго случая –

$$f'' = -\frac{2\sqrt{3}v^2}{F}.$$

Система отсчета, в которую мы пересели, инерциальная – ускорения в ней такие же, как и в исходной.

А.Старов

Задачи

1. В цифровом ребусе

$$АХ \cdot ЭХ = ХЭ \cdot ХА$$

буквы обозначают ненулевые цифры. Докажите, что $\frac{Х}{Э} = \frac{А}{Х}$.

А.Жуков

2. Математический бой начался между 10 и 11 часами, когда часовая и минутная стрелки были направлены в противоположные стороны, а закончился между 16 и 17 часами, когда стрелки совпали. Сколько времени продолжался математический бой?

А.Заславский

3. Известно, что существуют натуральные числа p, q, r, s, t, u, v, w, x такие, что

$$p^2 + q^3 + r^4 + s^5 + t^6 + u^7 + v^8 + w^9 = x^{10}.$$

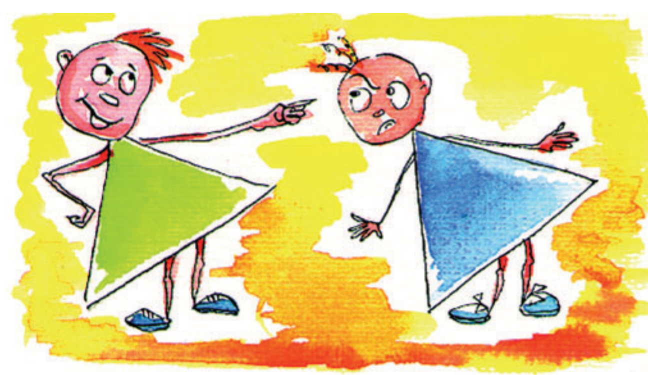
Найдите хотя бы один такой набор чисел.

В.Лецко

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

4. Про два треугольника известно, что для каждого из них сумма длин любых двух его сторон равна сумме длин двух каких-нибудь сторон другого треугольника. Равны ли эти треугольники?

Д. и М.Вельтищевы



5. Роща состоит из 300 деревьев. Известно, что если пометить любые 201 из них, то среди помеченных деревьев непременно найдутся дуб, береза и ель. Один чудак утверждает, что в таком случае роща состоит из 100 дубов, 100 берез и 100 елей. Прав ли этот чудак?

В.Произволов

Иллюстрации Д.Гришуковой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

16. Докажите, что для любых целых *x, y, z* выражение

$$2\left(\left|(x-y)(y-z)+(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)\right|+\right.$$
$$\left.+|x-y||y-z|+|y-z||z-x|+|z-x||x-y|\right)$$

равно квадрату целого числа.

В.Произволов

17. Взаимно простые натуральные числа *a, b, c* таковы, что $a^2+b^2=c^2$. Докажите, что остаток от деления числа *c* на 4 равен 1.

В.Сендеров

18. Выпуклый четырехугольник *ABCD* таков, что как бы ни разрезали его на 3 треугольника, всегда среди них найдется треугольник площади 1. Докажите, что *ABCD* – параллелограмм площади 2.

В.Произволов

19. Дано натуральное число *n*. Два игрока ходят по очереди, выписывая в строку по одной цифре (каждая последующая цифра записывается справа от предыдущей, самая первая цифра не должна быть нулем). Если после очередного хода получившееся число окажется делящимся на *n*, то игрок, сделавший этот ход, считается победителем. При каких *n* один из игроков может обеспечить себе победу при любой игре противника?

И.Акулич

20. Идет игра в «морской бой». На клетчатом поле размером 7×7 спрятан трехпалубный корабль. За какое наименьшее число выстрелов его можно наверняка потопить?

А.Малеев

Потомки Янычара

И.АКУЛИЧ

Кто смотрел замечательную экранизацию романа М.Булгакова «Бег», наверняка не забудет яркие эпизоды тараканьих бегов, организованных русским эмигрантом по имени Артур Артурович (с гордым прозвищем Тараканий царь). В бегах, проводившихся по всем правилам – с тотализатором, бесспорным лидером был серый в яблоках таракан Янычар. Любого соперника обходил, пока не раздавили.

Возможно, именно это событие (или же личная бытовая неустроенность) подвигло неизвестного автора придумать и предложить летом 2005 года на Турнире математических боев имени А.П.Савина следующую задачу:

В очередном забеге по коридору общежития участвуют 44 веселых таракана. Тараканы стартуют одновременно от одной стены. Добежав до противоположной стены, каждый таракан сразу поворачивает обратно. Первый таракан бежит не очень быстро, второй – вдвое быстрее, третий – вдвое быстрее второго и так далее. Могут ли тараканы встретиться все вместе в точке, отличной от точки старта?

Авторский ответ таков: могут. А именно, если ширина коридора равна *s*, а скорость первого таракана равна *v*, то через промежуток времени, равный $2s/(3v)$, все тараканы окажутся на расстоянии $2s/3$ от точки старта.

Доказать это проще всего по индукции. Правда, придется отдельно рассмотреть тараканов с нечетными и четными номерами, потому что они, оказывается, в момент встречи будут бежать в противоположные стороны.

Теорема 1. *Путь L, который пробежит любой таракан с нечетным номером (т.е. 1-й, 3-й, 5-й и т.д.) за промежуток времени, равный $2s/(3v)$, можно записать в виде*

$$L=2s\times K+2s/3,$$

где K – некоторое целое неотрицательное число.

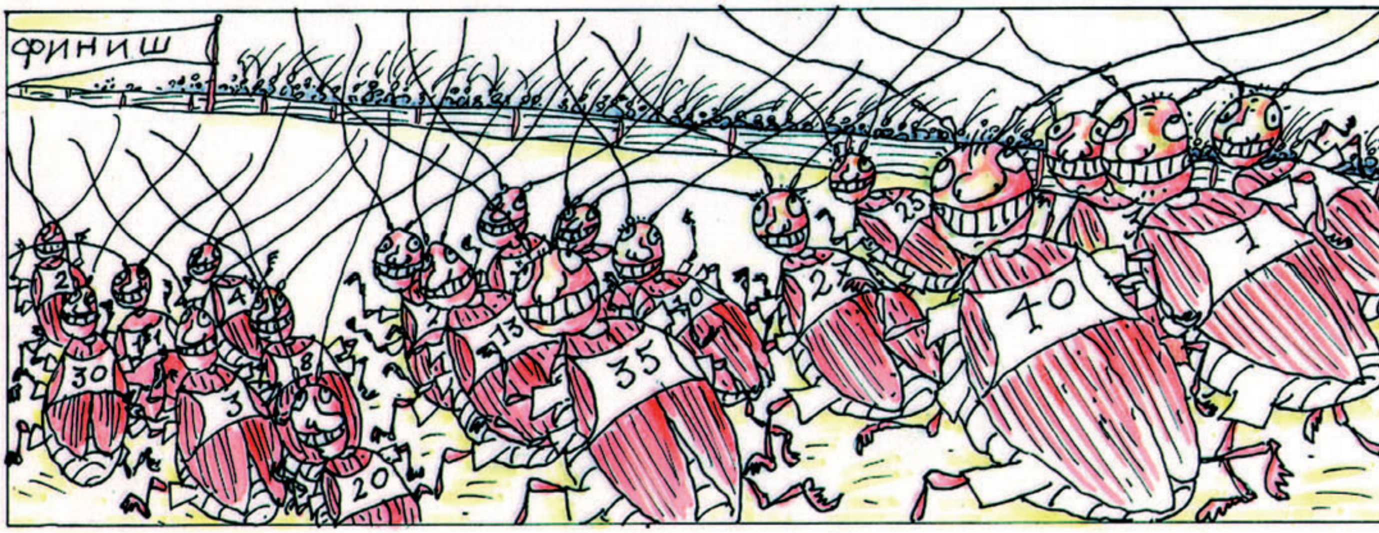


Иллюстрация В.Иванюка

Обратите внимание: это как раз и означает, что таракан на тот момент окажется на расстоянии $2s/3$ от точки старта, ибо первое слагаемое $2s \times K$ есть не что иное как K-кратный пробег таракана от одной стены до другой и обратно – на исходную позицию.

База индукции. Для таракана номер 1 все очевидно: для него $L = v \times 2s/(3v) = 2s/3$, что соответствует $K = 0$. Этот таракан даже до противоположной стены добраться не успеет.

Шаг индукции. Пусть некоторый таракан с нечетным номером за указанный промежуток времени пробежит путь $l = 2s \times k + 2s/3$ (k – целое неотрицательное). Скорость таракана со следующим нечетным номером, очевидно, в 4 раза больше, поэтому и путь его будет в 4 раза больше, т.е.

$$L = 4l = 4 \times (2s \times k + 2s/3) =$$

$$= 8s \times k + 8s/3 = 2s \times (4k+1) + 2s/3 = 2s \times K + 2s/3,$$

где $K = 4k + 1$ – тоже целое неотрицательное число.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Путь L, который пробежит любой таракан с четным номером за промежуток времени, равный $2s/(3v)$, можно записать в виде*

$$L = 2s \times K + s + s/3,$$

где K – некоторое целое неотрицательное число.

Это также означает, что таракан на тот момент окажется на расстоянии $2s/3$ от точки старта. Действительно, первое слагаемое $2s \times K$, как и прежде, есть K-кратный пробег таракана от одной стены до другой и обратно, второе слагаемое s – дополнительный пробег таракана от «стартовой» стены до противоположной, а третье слагаемое $s/3$ – возврат таракана от противоположной стены на величину, как раз соответствующую точке встречи.

Дальнейшее ясно. Сначала *база индукции.* Скорость таракана номер 2 равна $2v$, и за время $2s/(3v)$ он пробежит путь $2v \times 2s/(3v) = 4s/3 = s + s/3$, что соответствует $K = 0$.

Шаг индукции. Пусть некоторый таракан с четным номером за указанный промежуток времени пробежит путь $l = 2s \times k + s + s/3$ (k – целое неотрицательное). Путь таракана со следующим четным номером в 4 раза больше, т.е.

$$L = 4l = 4 \times (2s \times k + s + s/3) = 8s \times k + 4s + 4s/3 =$$

$$= 2s \times (4k+2) + s + s/3 = 2s \times K + s + s/3.$$

где $K = 4k + 2$ – тоже целое неотрицательное число.

Теорема 2 доказана.

Из справедливости обеих теорем следует, что все тараканы благополучно сойдутся в точке, отличной от стартовой.

Возражений нет?

А теперь проследим, как грубая реальность врывается в изящные теоретические рассуждения и с треском обрушивает ажурные умозрительные конструкции. Другими словами, убедимся, что на самом деле тараканы не встретятся *никогда.*

Из условия следует, что последний таракан бежит быстрее первого в $2^{43} = 8796093022208$ раз. Это больше (и гораздо больше!), чем 10^{12}. Скорость любого таракана (в том числе и последнего – самого быстрого) не превосходит 1 м/с (тоже сильно завышенное значение). Посему скорость первого таракана никак не больше $1 \text{м/с} : 10^{12} = 10^{-12}$ м/с. Ширина коридора общежития, безусловно, не меньше полутора метров (дабы жильцы при необходимости могли в нем как-то разминуться), и потому предполагаемая точка встречи всех тараканов находится на расстоянии $2 \times 1{,}5$ м/3 = 1 м от точки старта. И, стало быть, первый (не слишком быстрый, как сказано в условии) таракан доберется до нее не раньше чем через $1 \text{м} : 10^{-12}$ м/с $= 10^{12}$ с, что составляет больше 30 тысяч лет! Увы (или, может быть, к счастью), тараканы столько не живут. А значит, и встретиться им не суждено. Вот если бы тараканов было поменьше – где-нибудь с десяток, – тогда другое дело.

Да, автор задачи явно перестарался.

Физика внутри автобуса

В.КОТОВ

Хорошо известно, что многие явления окружающей нас действительности имеют физическую природу. Мы каждый день сталкиваемся с ними, не обращая на это внимания. Рассмотрим, например, некоторые физические явления, а именно – механические, которые может наблюдать пассажир автобуса.

Привычные чудеса в движущемся с ускорением автобусе. Происходящее вокруг мы обычно объясняем, связывая себя с неподвижной относительно земли основой. Но немалую часть своей жизни мы проводим в транспорте, в частности в автобусе. Применимы ли привычные нам объяснения для явлений, происходящих в движущемся транспорте? Проверим это.

Пройдем в салон автобуса. Оглядимся. Капли с мокрого зонта достигают пола точно под местом отрыва, а образующаяся лужица растекается по полу одинаково по всем направлениям. Ничего необычного (пока автобус стоит) нет. В каждом явлении четко прослеживаются причина и следствие. Изменение положения или скорости тел обусловлено известными реальными силами. Если действие сил на тело уравновешено, то тело покоится или движется по инерции, т.е. прямолинейно и равномерно. В этом состоит закон инерции. В стоящем автобусе он действительно выполняется.

Но вот автобус тронулся и стал набирать скорость – тотчас пассажиров и все находящиеся в салоне предметы стало «увлекать» назад, против направления ускорения и движения. Капли теперь падают не под местом отрыва, а позади него. Рассыпанные яблоки катятся по полу уже не одинаково во все стороны, а преимущественно назад. Сидящие пассажиры почувствовали, как их вдавило в стенки сидений, а стоящие – как их потянуло назад. Однако когда движение автобуса стало равномерным, необычные явления в нем прекратились. Все внутри салона теперь происходит так, что создается полное подобие остановки автобуса (если не считать тряски и мелькания пейзажа за окном). Затем автобус стал подъезжать к остановке, и необычные отступления от привычных явлений снова возникли при торможении автобуса. Теперь пассажиров и находящиеся в салоне предметы «потянуло» вперед, против направления ускорения.

Для внешнего наблюдателя (скажем, пешехода) все описанное – результат ускоренного движения автобуса и инертности находящихся в нем тел. Стенка сидения, пол ускоряющегося автобуса воздействуют на пассажира (а не наоборот, как ему кажется), увлекая его. Свободные же предметы сохраняют прежнее положение относительно земли, поэтому они начинают двигаться ускоренно относительно корпуса автобуса.

С точки же зрения пассажира автобуса, чьи наблюдения ограничены стенками салона, происходящее выглядит загадочно и необычно, тем более что источник странных явлений внутри автобуса не обнаруживается.

Попробуем разобраться.

В ускоряющемся автобусе закон инерции не выполняется – все тела, не связанные с корпусом автобуса, приобретают одно и то же ускорение, равное и противоположное по направлению ускорению автобуса. Это позволяет ввести приложенные ко всем телам в автобусе ускоряющие силы, как будто автобус попал в ускоряющее поле сил. Такие силы равны произведению массы каждого тела на ускорение системы и направлены против этого ускорения – их называют силами инерции. С помощью сил инерции объясняются все описанные выше «чудеса» в салоне автобуса.

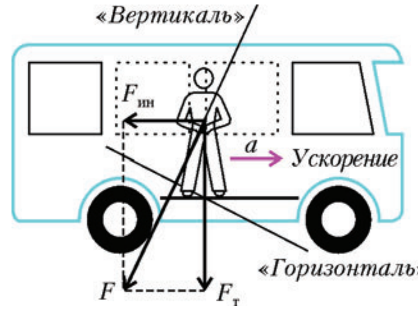


Рис. 1

Наложение на поле тяготения поля сил инерции создает новое поле со своими «горизонталью» и «вертикалью», отличными от земных (рис.1). Важно подчеркнуть, что для каждого тела внутри ускоряющегося автобуса одинаковы отношения сил тяжести $F_т$ и инерции $F_{ин}$, а также угол между ними. Поэтому для всех этих тел направление результирующей силы $\vec{F}$ одно и то же.

Теперь мы можем объяснить некоторые удивительные наблюдения пассажира.

Пол уходит из-под ног. Когда автобус замедляет ход, пассажиру кажется, что пол как бы идет вниз, если человек шагает вдоль салона в направлении движения автобуса, и восходит вверх, если он идет в обратном направлении. А при разгоне автобуса от остановки пол как бы наклоняется в сторону, противоположную движению. Это можно объяснить тем, что на пассажира действуют приложенные в его центре масс сила тяжести и сила инерции, а их равнодействующая совпадает по направлению с новой вертикалью в системе отсчета, связанной с автобусом (см. рис.1).

Проанализировав действующие на пассажира в автобусе силы, можно указать приемы сохранения пассажиром устойчивости без помощи рук. Действительно, условием устойчивости тела, имеющего площадь опоры, является пересечение действующей на тело силы с площадью опоры. Если эта сила выходит за пределы площади опоры, то под ее действием тело пассажира опрокидывается. Противодействовать этому можно, расставив ноги шире или отставив ногу в сторону, противоположную ускорению. Пассажир также может сохранить равновесие, наклонив при этом туловище так, чтобы «ось» тела совпала с новой вертикалью (даже соединив при этом ноги). А чтобы устоять в салоне автобуса, испытывающего ускорение и толчки во всех направлениях, нужно расставить ноги вдоль одной, например продольной, оси салона (X), препятствуя продольным отклонениям, а руки развести в перпендикулярном направлении (Y) и держаться за поручни (рис.2).

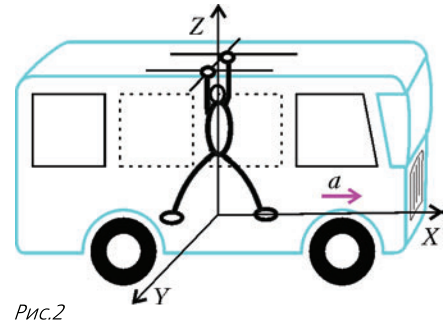


Рис.2

Убедиться в изменении положения горизонтали в движущемся с ускорением автобусе можно, проделав простой опыт. Возьмите тарелку с какой-нибудь вязкой жидкостью, например с маслом или глицерином (можно взять пластмассовый стаканчик со сгущенным молоком), и неравномерно двигайте ее по столу. Жидкость будет выливаться через задний край тарелки при резком трогании с места и приливать к переднему краю при прекращении движения. Причем плоскость поверхности жидкости всегда перпендикулярна вектору результирующей силы, полученной сложением сил тяжести и инерции, приложенных к частицам жидкости.

Неприятное происшествие. Представьте, что в автобусе кто-то наступил вам на ногу. Кто виноват?

С вашей (автобуса) точки зрения, разумеется, виноват этот «кто-то». И это верно, если все произошло в стоящем автобусе. Но в автобусе, движущемся с ускорением, нужно учитывать, что на каждое тело действует сила инерции, а управляет ею, точнее ускорением, водитель автобуса.

Рассмотрим происходящее с точки зрения пешехода (земли). Из-за малого взаимодействия с корпусом автобуса и инертности своего тела туловище пассажира при ускорении автобуса продолжает сохранять прежнее положение относительно земли, тогда как его ноги вместе с полом автобуса перемещаются ускоренно. Поэтому тело пассажира смещается относительно салона при резком торможении – вперед, а при рывке – назад. Таким образом, водитель автобуса, подобно фокуснику, может перемещать пассажиров в салоне автобуса, не прикасаясь к ним и помимо их желания. Чем он часто и пользуется: если из-за скопления людей не закрывается задняя дверь, водитель резко тормозит, а если пассажиры скопились на передней площадке – делает рывок. Получается, что с водителя, в первую очередь, и нужно спрашивать за отдавленную ногу.

Случай с пассажиром. Приходилось ли вам наблюдать за человеком, неосторожно потерявшим связь с корпусом автобуса во время ускоренного движения последнего? С точки зрения других пассажиров, он попадает во власть силы инерции. Подобно листку, сорванному с дерева и гонимому ветром, человек стремительно перемещается вдоль салона, ища за что бы ухватиться. И вот это ему удалось: его протянутая рука судорожно вцепилась в вертикальную стойку поручней автобуса, мимо которой его тащит сила инерции. Ухватившись, пассажир ожидает остановки своего движения, но вместо этого он совершает оборот вокруг стойки и со всего размаху налетает на стоящих рядом пассажиров. Почему так происходит?

Сила, действующая на пассажира со стороны стойки поручней, в нашем случае перпендикулярна направлению движения тела. Поэтому, изменив его скорость по направлению, стойка не может изменить величину скорости. Переводя прямолинейное движение во вращательное, она выполняет роль центростремительной силы. Зависящая от скорости кинетическая энергия поступательного движения переходит в энергию вращательного движения ... со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Итак, вооружившись знанием физики, смело ищите и разгадывайте предложенные окружающим миром загадки, не забывая о правилах поведения пассажиров в общественном транспорте и правилах уличного движения.

Наблюдения в «нефизическом» мире

А.УСОЛЬЦЕВ

ПОЧЕМУ *ВЗРОСЛЫЕ* ЗАПРЕЩАЮТ ДЕТЯМ ИГРАТЬ В КОМпьютерные игры столько, сколько хочется? Возможно, из зависти – ведь в *их* молодые годы солдатики были только пластмассовые или оловянные, *они* и подумать не могли о том, чтобы управлять почти что живыми армиями, бегать с гравитационной пушкой и «крошить» всякую там нечисть. В общем, реальность никакого сравнения с виртуальным миром не выдерживает.

Но давайте задумаемся: а так ли уж интересно, если при прыжке вниз наш герой ни с того ни с сего вдруг полетит вверх или если выпущенная пуля, вместо того чтобы поразить врага, станет летать по кругу? Наверное, любая самая увлекательная компьютерная игра становится интересной тогда, когда на ее фантастический сюжет накладываются физические закономерности окружающего мира, которые и придают правдоподобность нашим удивительным приключениям. Конечно, монстры чем страшнее, тем лучше, но физика и в игре должна быть физикой.

Попробуем через окно нашего монитора увидеть физические закономерности удивительного электронного мира.

Вот перед нами игра – автосимулятор «Underground 2» (или другая аналогичная игра). В этой игре, как и в реальной жизни, многое зависит от технического совершенства нашего автомобиля, поэтому много усилий и денег мы потратим на «покупку» запчастей. Для начала купим для машины маховик большей массы и установим его. Теперь наш автомобиль меньше трясет, но скорость он набирает медленнее, так как инерционность маховика не позволяет создавать большое ускорение. Установка регуляторов давления позволяет экономить топливо, а значит, экономить деньги и время на заправку. Обязательно покупаем новые шины, что сразу улучшает сцепление с дорогой.

Можно сказать, что мы вошли во вкус. Однако пробежимся по всему перечню товаров: фильтры топлива, новые тормозные колодки,..., *недостаток* мощности!? Зачем же мне покупать себе своими руками недостаток мощности? Может, это связано с издержками перевода текста игры с английского на русский? Хорошо, пусть это будет *избыток* мощности, но зачем мне избыток мощности? Вот *увеличение* мощности автомобиля для гонки нам не помешает. Только в реальности нельзя купить абстрактное увеличение мощности, оно достигается лишь путем материальных изменений машины или топлива к ней.

Тут мы и выявили первое несоответствие игры и реальной жизни. Да, в жизни оказывается все намного сложнее.

Давайте теперь немного постреляем, благо в виртуальной жизни мы не чувствуем боли, да и жизней у нас много... Итак, мы в мире игры «Half Life 2», где помогаем повстанцам победить диктатора и страшных зомби с пауками на голове.

Вот груз, который может качаться на веревке. Толкнем его, измерим время, за которое груз совершит десять колебаний, найдем период колебаний T, затем оценим длину веревки L и по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ подсчитаем ускорение свободного падения g. Получается результат, близкий к величине реального, земного ускорения свободного падения. Надо же, мелочь – а приятно.

Пойдем дальше. Перед нами водоем. Бросим что-нибудь в воду. Видно, что тела, брошенные в воду, ведут себя в соответствии со своими реальными прототипами – деревянные тела «плавают», а стальные «тонут». Тоже неплохо. Что-то, правда, есть в воде странное, нереальное... Ладно, потом разберемся.

Здорово, что мы можем брать разные предметы (банки, коробки), помещать их на любые горизонтальные поверхности (стол, стул, ящик и т.д.), а затем стрелять по ним из различных имеющихся видов оружия. Попробуем использовать это для того, чтобы осуществить виртуальный физический эксперимент по оценке скорости вылета пули из имеющегося у нас пистолета. Для этого мы выстрелим «в упор» из пистолета в ведро, поставленное на некоторой высоте. Измерив высоту ведра над землей и расстояние, на которое отлетает ведро, мы оценим его начальную скорость. Затем, оценив массы ведра и пули, найдем скорость пули.

Первая проблема, с которой мы сталкиваемся в виртуальном компьютерном мире, связана с определением расстояния «на глаз». Для решения этой проблемы необходимо найти эталон длины, имеющий аналоги в реальности. В качестве такого «эталона» мы возьмем высоту бочки, так как в нашей виртуальной среде не составляет труда найти две такие бочки (на одну мы поставим ведро, а второй бочкой будем измерять расстояние).

Вторая проблема возникает тогда, когда мы пытаемся определить место падения ведра, так как ведро отскакивает и катится довольно далеко, а «след» от его первоначального падения на виртуальной «земле» быстро исчезает. Для фиксации точки падения ведра разместим на земле различные предметы, по которым визуально будем определять место удара ведра о поверхность. В качестве таких предметов мы использовали разный подручный «мусор»: пустые коробки, канистры, банки, которые валяются в игре на каждом шагу (что не очень хорошо характеризует обитателей этого мира).

Теперь, приступаем к сборке «экспериментальной установки». Найдем ровную горизонтальную площадку и поставим бочку, а на нее осторожно установим ведро. Далее, в направлении предполагаемого отлета ведра выкладываем найденные нами предметы на расстоянии друг от друга в одну «эталонную бочку». В результате проведенной достаточно трудоемкой работы «организованная» нами виртуальная реальность выглядит так, как показано на рисунке 1. Затем мы стреляем в ведро и смотрим, возле какого предмета

Рис. 1

оно упало. Из-за большой скорости ведра это бывает сделать достаточно сложно. Поэтому фрагмент выстрела и последующего полета целесообразно записать (мы делали это с использованием программы «Fraps»), чтобы иметь возможность неоднократного просмотра. После чего берем реальный прототип виртуального «ведра» и взвешиванием находим его массу, которая оказывается равной $M = 1{,}4$ кг. Массу пули оцениваем в 10 г, которые фигурируют в большинстве физических задач про огнестрельное оружие: $m = 10$ г. Так как ведро упало около коробки, положенной на расстоянии четырех длин бочки, оцениваем дальность его полета: $L = nH$, где $n = 4$, а H – высота бочки, которую мы будем считать равной 1,2 м.

Записываем условие задачи и решаем ее. Время свободного падения ведра равно $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, начальная горизонтальная скорость ведра составляет $u = \frac{L}{t} = \frac{nH}{t} = n\sqrt{\frac{gH}{2}}$. По закону сохранения импульса находим скорость пули v:

$$mv = Mu,\ v = \frac{Mu}{m} = \frac{Mn}{m}\sqrt{\frac{gH}{2}} = 1400\ \text{м/с}.$$

Полученный результат вызывает сомнения – не слишком ли велика скорость пули?

Проверим, будут ли действовать выявленные нами закономерности для другого тела. Для этого повторим опыт, но вместо ведра возьмем ванночку, которая весьма кстати лежала рядом с найденным нами ведром. Опыт показывает, что ванночка отлетает на расстояние вдвое меньше, чем ведро. Определение массы ванночки при найденном нами значении скорости пули дает результат около 3 кг, близкий к реальному. Это свидетельствует о том, что скорость вылета пули из пистолета является постоянной при взаимодействии пули с любыми другими объектами в игре. Стрельба из разных видов оружия показывает, что скорости вылета пуль из них различны.

Таким образом, можно сказать, что при создании физической модели игры ее разработчики присваивали различным видам оружия различные значения скорости, а разным телам – разные массы, соответствующие массам их реальных прототипов.

Следующее виртуальное исследование свяжем с изучением свойств оружия, не имеющего пока аналогов в реальной действительности, которое мы условно назовем «силовой пушкой» (СП). Такая «пушка» позволяет притягивать к себе любые предметы, а затем «стрелять» этими предметами с достаточно большой скоростью. Попробуем оценить эту скорость.

Для этого будем использовать металлические диски от циркулярной пилы, почему-то в избытке «валяющиеся» во всех зданиях (что еще раз характеризует жителей этого мира, как людей неряшливых и странных). Притянем «пушкой» один из таких дисков, отойдем от деревянной стены на расстояние примерно два метра, а затем выстрелим из пушки в эту стену по возможности в горизонтальном направлении. Диск воткнется в стену. Отойдем еще на два метра от стены (эти точки мы заранее отметили пустыми банками) и выстрелим другим диском тоже горизонтально. Понятно, что второй диск должен воткнуться в стену ниже первого, что мы действительно и наблюдаем (рис.2).

По расстоянию Δy между дисками и расстояниям x_1 и x_2 до стены при двух выстрелах оценим скорость v_0 вылета дисков из СП:

$$\Delta y = y_2 - y_1,\ y_1 = \frac{gt_1}{2},\ y_2 = \frac{gt_2^2}{2},\ x_1 = v_0 t_1,\ x_2 = v_0 t_2,$$

Рис. 2

откуда находим

$$v_0 = \sqrt{\frac{g\left(x_2^2 - x_1^2\right)}{2\Delta y}}\,.$$

Подставим оценочные данные виртуального эксперимента: $x_1 = 2$ м, $x_2 = 4$ м, $\Delta y = 0{,}2$ м и получим начальную скорость: $v_0 = 17$ м/с. Это значение оказывается меньше ожидаемого, так как визуально скорость представляется очень большой. Но если мы выйдем на «улицу» и выстрелим горизонтально, то визуальная оценка дальности полета (не более 20–30 м) подтверждает правильность оценки начальной скорости.

В дальнейшем можно оценить высоту зданий, стараясь «забросить» различные предметы на их крышу, или поэкспериментировать с телами разной массы (начальная скорость выстрела которых из СП оказывается постоянной и не зависящей от массы) и так далее.

А мы теперь зайдем в подвал, часть которого залита водой. Вода в подвале достаточно чистая и прозрачная, но что-то кажется в этой картинке неправильным. Точно – труба, которая уходит под воду! Луч, идущий из воды, должен испытывать преломление, и поэтому труба должна казаться «кривой». Но искривления не видно. Да, не предусмотрели разработчики игры выполнение законов преломления света.

Вот мы и выявили еще одно несоответствие игры и реальной жизни. Никогда бедные жители этого неряшливого мира не увидят в небе радугу, не полюбуются на лунную дорожку, убегающую в море... В жизни все оказывается не только намного сложнее, чем в игре, но и намного интереснее.

«Загадка» тени от прозрачной пластинки

Я.АМСТИСЛАВСКИЙ

Оказывается, если в пучок белого света ввести тонкую прозрачную пластинку, то при соблюдении некоторых требований к положению пластинки и условиям ее освещения можно в проходящих лучах увидеть отчетливую узкую темную полоску тени от края пластинки.

В домашних условиях это явление можно наблюдать по схеме на рисунке 1. Здесь *Щ* – ориентированная вертикально ярко освещенная узкая щель, выполняющая роль вытянутого в линию (линейного) источника света; *Пл* – пластинка из прозрачного материала, это может быть листок слюды, обертка от коробки сигарет, кусок отмытой от эмульсии фотопленки, покровное стекло или тонкий слой другого прозрачного материала; *Э* – экран в виде листа белой бумаги; точка O' – то место экрана, где наблюдается узкая полоска тени от края пластинки; *Сп* – спектроскоп.

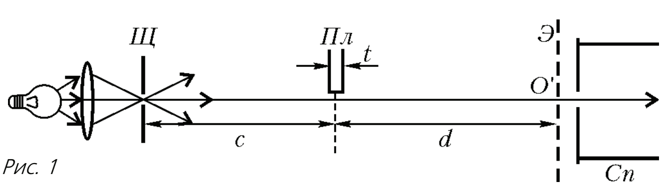


Рис. 1

Для выяснения природы наблюдаемого явления важно знать, попадает ли в область темной полоски какой-то свет и, если попадает, каков его спектральный состав. С этой целью можно использовать школьный спектроскоп. В ходе опыта экран убирают, а спектроскоп (или пластинку) осторожно смещают в поперечном направлении, добиваясь точного совмещения полоски тени со щелью спектроскопа. В этом случае при должной узкости щелей и расположении щелей и края пластинки в одной плоскости в поле спектроскопа можно обнаружить достаточно яркий и контрастный спектр – совокупность чередующихся светлых (окрашенных) и темных полос в непрерывном спектре (см. приведенные далее рисунки 3 и 4). Такой вид спектральной картины означает, что в область O', с которой совмещена щель спектроскопа, попадает без заметного ослабления свет некоторых избранных длин волн, обозначим их λ_k, и совершенно не попадает свет промежуточных длин волн – λ'_k. И можно предположить, что наблюдаемое явление имеет интерференционное происхождение.

В спектральной картине наблюдается плавный переход освещенности от максимумов к минимумам, при этом минимумы освещенности оказываются совершенно темными, поэтому можно говорить о том, что интерферирующие пучки имеют одинаковые интенсивности. Вместе с тем, для формирования светлых полос в сплошном спектре с плавным переходом освещенности от максимумов к минимумам необходимо, чтобы изменение фазового сдвига $\Delta\varphi$ интерферирующих пучков с изменением длины волны λ также происходило монотонно. Но на пути световой волны, распространяющейся от источника света к области O', нет никаких интерференционных устройств, кроме фазовой неоднородности в виде ступеньки различной оптической плотности на границе раздела двух прозрачных сред – воздуха и пластинки. Поэтому можно сказать, что интерферирующие пучки возникают в результате дифракции от этой фазовой неоднородности. За счет интерференции дифрагированных пучков и происходит максимальное усиление света в области длин

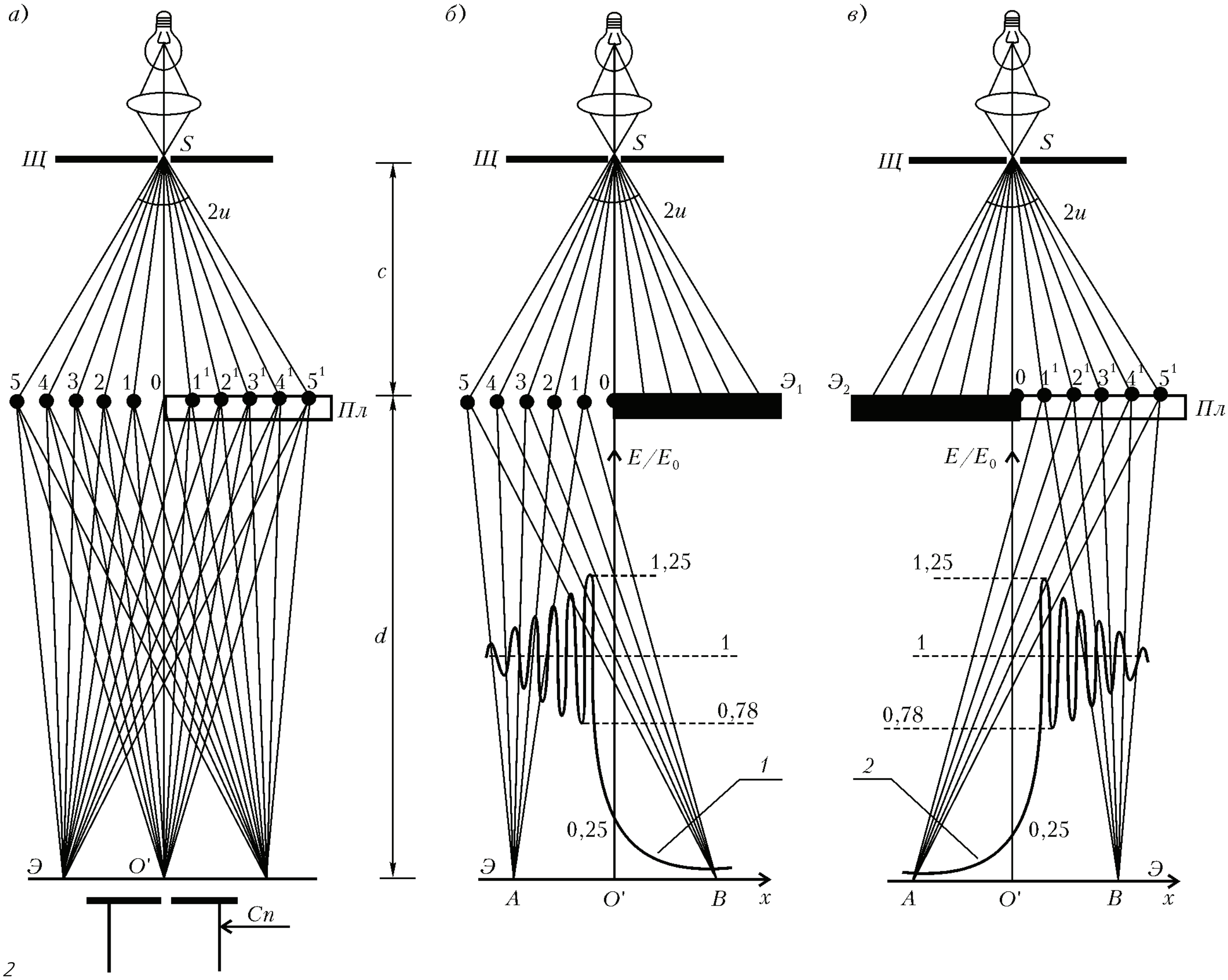


Рис. 2

волн $\lambda = \lambda_k$ и максимальное гашение в области промежуточных длин волн $\lambda = \lambda'_k$. Значит, узкая «темная» пограничная полоска тени от края тонкой прозрачной пластинки, наблюдаемая в плоскости экрана, в действительности оказывается темной не для всех длин волн, а только для избранных – для $\lambda = \lambda'_k$.

Для последующего рассмотрения развернем схему установки на 90° (рис.2), а дифракционный эффект в области тени от края пластинки представим как результат наложения двух когерентных дифрагированных пучков. Один из них возникает при дифракции первичного пучка от края непрозрачного экрана $Э_1$, прикрывающего правую половину свободного фронта (см. рис.2,*б*); второй – при дифракции первичного пучка от края непрозрачного экрана $Э_2$, прикрывающего левую половину свободного фронта, при условии что правая половина закрыта данной прозрачной пластиной *Пл* (см. рис.2,*в*). Взаимная интерференция этих двух пучков и определит распределение амплитуд и фаз колебаний в картине дифракции от края прозрачной пластинки *Пл* при ее расположении по схеме рисунка 2,*а*.

Начнем со схемы рисунка 2,*б*. В соответствии с принципом Гюйгенса будем считать, что точки 0, 1, 2, 3, 4, 5 первичной волны представляют собой элементарные вторичные излучатели. (Для того чтобы эти излучатели оказались когерентными, необходимо, чтобы ширина b источника света – щели *Щ* – удовлетворяла условию когерентности $b \sin 2u < \frac{\lambda}{2}$, где $2u$ – угол когерентности. Уменьшая b, это условие всегда можно удовлетворить.) Начальные фазы излучателей оказываются различными – они возрастают от точки 0 к точке 5. Эти излучатели посылают вторичные волны во все стороны, в частности – в точку A освещенной области, в точку B области геометрической тени и в точку O' пограничной области. Фаза колебания, приходящего в данную точку наблюдения от каждого элементарного излучателя, зависит от его начальной фазы и набегающей фазы при распространении волны от излучателя до точки наблюдения. Таким образом, в каждую точку плоскости наблюдения приходит своя совокупность элементарных когерентных волн, различающихся по амплитудам и фазам. Их взаимная интерференция и определит результирующую амплитуду a и освещенность E, а также фазу результирующего колебания в каждой точке плоскости наблюдения.

Расчет приводит к функции распределения освещенности $E = E(x)$, график которой показан на рисунке 2,*б* кривой *1*. Точке O' соответствует граница геометрической тени. Левее этой точки формируется система близко расположенных светлых полос, имеющих большую освещенность при очень малой и убывающей по мере удаления от O' контрастности полос. Правее наблюдается резкое и монотонное убывание освещенности. В самой же пограничной точке O' имеем

$$a = \frac{1}{2} a_0 \quad \text{и} \quad E = a^2 = \frac{1}{4} a_0^2 = \frac{1}{4} E_0 ,$$

(Продолжение см. на с. 34)

...нам не стыдно признать, что весь подлунный мир и центр Земли движутся по Великому кругу между другими планетами, заканчивая свое обращение вокруг Солнца в один год...

Николай Коперник

...внутри молекулы электроны движутся по замкнутым орбитам, создавая магнитное поле, подобное тому, какое было бы создано замкнутым током, текущим по тем же орбитам.

Поль Ланжевен

Мы видели, что путь частицы в однородном магнитном поле проходит по круговой орбите. Но это справедливо только для идеального магнитного поля.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомо вам движение по окружности?

Это движение объединяет попытки описать устройство окружающего мира и в самых больших, и в самых малых масштабах. Даже в посланиях гипотетическим внеземным цивилизациям, стремясь свести к минимуму важнейшую информацию о нас и о наших знаниях, ученые помещают изображения Солнечной системы и структуры атома, удивительно схожие между собой и состоящие из вложенных друг в друга окружностей, по которым несутся планеты и электроны. А что уж говорить о неисчислимом количестве используемых в технике, строительстве, транспорте вращающихся колес, валов и шестеренок! Воистину «все вертится, и кружится, и несется кувырком».

Вероятно, нашим далеким предкам наблюдаемое круговое движение светил казалось универсальным. Более того, все небесное представлялось идеальным, а идеальной фигурой считалась окружность. Но со временем выяснилось, что орбитами планет являются эллипсы, вращение Земли испытывает возмущения, а в движение предметов по крутящимся телам вмешивается загадочная сила инерции. Да и электроны в атоме мчатся вовсе не по окружностям, если вообще это можно назвать механическим движением...

И все же, с чего-то надо начинать изучение этого многообразия явлений. Окружность как нельзя кстати подходит на роль пусть простой, но охватывающей множество ситуаций модели. В то же время ее простота и идеальность, как вы убедитесь, порой бывают весьма обманчивы.

Вопросы и задачи

1. Жесткий стержень скользит в вертикальной плоскости, опираясь своими концами на пол и стену. По какой траектории движется середина стержня?

2. Точка *A* движется со скоростью 1 м/с, а точка *B* – со скоростью 2 м/с, причем скорости этих точек сонаправлены. Может ли расстояние *AB* оставаться неизменным?

3. Луна постоянно обращена к Земле одной стороной. Сколько оборотов совершит она вокруг своей оси за время полного оборота вокруг Земли?

4. Будет ли происходить смена дня и ночи на Земле, если она перестанет вращаться вокруг своей оси?

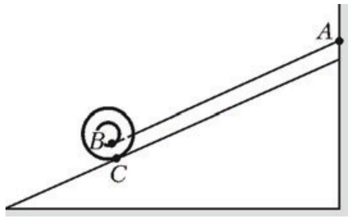
5. Во сколько раз угловая скорость часовой стрелки больше угловой скорости суточного вращения Земли?

6. Ускорения двух материальных точек, движущихся по окружностям одного и того же радиуса, равны по модулю. Однако ускорение первой точки направлено под углом 45° к касательной, а ускорение второй – по радиусу. У какой из этих точек больше скорость?

7. Почему верхние спицы катящегося колеса велосипеда иногда сливаются в одно целое, в то время как нижние видны раздельно?

8. Сплошной диск катится без проскальзывания по горизонтальному участку пути с постоянной скоростью. Какие точки диска имеют относительно неподвижного наблюдателя такую же по модулю скорость, что и центр диска?

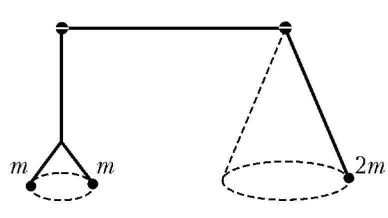
9. Будет ли скатываться с наклонной плоскости катушка, прикрепленная к стенке нерастяжимой нитью? Проскальзывание катушки по плоскости отсутствует.



10. Как на основе наблюдений звездного неба доказать, что Земля вращается вокруг собственной оси и что вращение происходит с запада на восток?

11. К концам нити , переброшенной через два гвоздя (см. рисунок ниже), прикреплены движущиеся по горизонтальным окружностям грузы: слева – два груза массой *m* каждый, справа – один груз массой 2*m*. Будет ли эта система находиться в равновесии?

12. На нити подвешен шарик. Нить приводят в горизонтальное положение и отпускают шарик. В каких точках траектории его ускорение направлено: а) вертикально вверх; б) вертикально вниз?



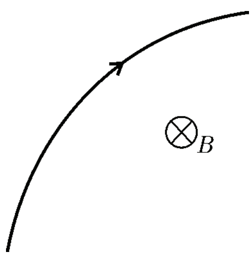
13. В кабине лифта на нити, подвешенной к потолку, качается небольшой грузик. Как будет двигаться грузик относительно лифта, если в какой-то момент лифт начнет свободно падать?

14. На правые или левые рессоры оседает автомобиль при левом повороте?

15. На круглой горизонтальной платформе находится небольшое тело. Куда направлена сила трения, действующая на это тело при раскручивании платформы вокруг вертикальной оси до его соскальзывания?

16. За какое время плоскость колебаний маятника Фуко совершает полный оборот?

17. На рисунке изображен участок траектории частицы, движущейся в постоянном магнитном поле. Каков знак заряда частицы?



18. Начальная скорость электрона составляет некоторый угол с совпадающими по направлению векторами электрической напряженности и магнитной индукции. Каков характер движения электрона в области, занимаемой этими полями?

Микроопыт

Наполните бутылку наполовину водой и опустите на воду пробочный поплавок с отверстием посередине. Затем в это отверстие свободно проденьте спицу, а другой ее конец закрепите в закрывающей бутылку пробке (при этом нижний конец спицы должен быть немного погружен в воду). Попробуйте снять поплавок со спицы, не открывая бутылку.

Любопытно, что...

...еще в древности были известны три календаря. Первый был связан с вращением Земли вокруг своей оси, второй – с вращением Луны вокруг Земли и третий – с вращением Земли вокруг Солнца.

...очень сложная система мира Птолемея, опровергнутая Коперником, основывалась на сорока не зависящих друг от друга круговых движениях планет вокруг Земли и «процарствовала» в астрономии около четырнадцати веков. Такое долголетие ей обеспечили достаточно точно предсказываемые затмения, появления планет из-за горизонта и все видимые изменения на небосводе.

...Галилей, установивший закон инерции, войдя в противоречие с самим собой, убедительно доказал ошибочное утверждение: причина обращения планет вокруг Солнца – инерция, а движение по инерции может быть только движением по окружности!

...при движении тела во вращающейся системе отсчета кроме центробежной силы инерции возникает еще одна сила инерции – сила Кориолиса, которая как бы толкает тело вбок. Действие именно этой силы приводит к подмыванию правых берегов рек в северном полушарии и левых – в южном, к отклонению падающих тел от вертикали и к повороту плоскости колебаний маятника Фуко. Кстати, два последних факта были исторически первыми доказательствами вращения Земли вокруг своей оси.

...объяснить, почему чаинки собираются в центре стакана при помешивании чая ложечкой, оказалось нешуточным делом. Во всяком случае, один из основоположников квантовой механики Э.Шрёдингер не сумел найти разумного ответа. В этом он признался основателю теории относительности А.Эйнштейну, впоследствии посвятившему верному объяснению этого опыта отдельную научную публикацию.

...геостационарный спутник, «висящий» над одной точкой земной поверхности, можно запустить лишь в экваториальной плоскости. Высота его орбиты составляет около 36 тысяч километров, при этом он обеспечивает связь между наземными пунктами, лежащими до 81° северной и южной широт.

...свободная поверхность жидкости во вращающемся сосуде принимает форму параболоида вращения, способного собирать в одну точку все падающие параллельно его оси световые лучи. Это свойство использовал знаменитый американский физик-экспериментатор Роберт Вуд, построив телескоп, состоящий из вращающегося на дне колодца блюда со ртутью.

...планетарная модель атома Резерфорда – Бора позволяет оценить скорость обращения электрона в атоме водорода, превышающую 2 миллиона метров в секунду. Ускорение же, испытываемое при этом электроном, должно достигать поистине чудовищной величины – примерно 10^{23} м/с^2 !

...выражение для силы, действующей на движущийся точечный заряд в магнитном поле, впервые было установлено Дж.Максвеллом. Однако эта сила носит имя голландского ученого Х.Лоренца, принявшего определяющее ее соотношение за один из основных законов микроскопической электродинамики.

...впервые искривлять траекторию разгоняемых заряженных частиц с помощью магнитного поля предложил в 1928 году Л.Сциллард. Развитие этого принципа привело к появлению различных ускорителей, а также накопительных колец, в которых «хранятся», двигаясь с близкой к световой скоростью, даже такие экзотические частицы, как позитроны и антипротоны.

Что читать в «Кванте» о движении по окружности

(публикации последних лет)

1. «Почему кувыркается книга» – 2000, №3, с.37;
2. «Похожие движения» – 2002, №3, с.29;
3. «Если вращается елочный шарик» – 2002, №3, с. 44;
4. «Солнце остановил, сдвинул Землю» – 2003, №2, с.13;
5. «Ванна и закон Бэра» – 2003, №3, с.12;
6. «И все-таки она вертится...» – 2003, №4, с.17;
7. «Смерч у вас дома» – 2003, №4, с.42;
8. «Вихри Титана» – 2004, №6, с.14;
9. «О динамике криволинейного движения» – 2005, №2, с.30;
10. «Принцип Торричелли и центробежная сила инерции» – 2005, №3, с.35;
11. «Об одном математическом случае» – 2005, №4, с.31 и №5, с.24.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 30)

где a_0 и E_0 – амплитуда и освещенность результирующей волны, приходящей в O' от свободного фронта.

Теперь перейдем к рисунку 2,*в*. Нетрудно видеть, что распределение освещенности в дифракционной картине в этом случае представляется кривой *2*, полностью симметричной кривой *1*. Единственное отличие состоит в том, что результирующие колебания в разных точках экрана наблюдения отличаются от предыдущего случая на величину $\Delta\varphi(x)$, зависящую от толщины t прозрачной пластинки и ее абсолютного показателя преломления n.

Вернемся, однако, к интересующему нас расположению (см. рис.2,*а*). От левой полуплоскости на экране *Э* формируется картина, распределение освещенности в которой дается кривой *1*, а от правой полуплоскости – кривой *2*. Поскольку обе полуплоскости прозрачны, то в каждой точке экрана будут перекрываться два результирующих колебания. Эти колебания имеют разные амплитуды и сдвиг фаз $\Delta\varphi$, различный для разных точек экрана *Э*. Но нас не интересует общая картина интерференции, нам важно знать, что делается в области точки O', где появляется узкая полоска тени. Можно сказать, что в O' перекрываются два колебания, для которых

$$a_1 = a_2 = \frac{a_0}{2} \text{ и } E_1 = E_2 = \frac{E_0}{4}.$$

Несущие эти колебания лучи проходят от точки S до точки O' одинаковые оптические пути повсюду, за исключением участка толщиной t: один из лучей проходит этот участок вблизи края пластинки *внутри пластинки* и набирает оптический путь tn, второй же луч проходит ту же толщину вблизи края пластинки, но в *воздухе*, и набирает оптический путь tn_0, при этом между лучами набегает оптическая разность хода $\Delta = t(n - n_0) = t(n-1)$, где $n_0 = 1$ – показатель преломления воздуха. Связь между разностью хода лучей Δ и сдвигом фаз колебаний $\Delta\varphi$ определяется известным соотношением $\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda}$. Поэтому в нашем случае можно записать

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{t(n-1)}{\lambda}.$$

Видно, что с изменением длины волны λ величина $\Delta\varphi$ изменяется и периодически удовлетворяет условию максимального усиления $\Delta\varphi = 2k\pi$, где k – целое число. Следовательно, получим условие максимального усиления в виде

$$t(n-1) = k\lambda_k,$$

где λ_k – те длины волн, которые максимально усиливаются в точке O'. Максимальное гашение будут испытывать промежуточные длины волн λ'_k, для которых выполняется соотношение $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$, поэтому условие максимального гашения запишем в виде

$$t(n-1) = (2k+1)\frac{\lambda'_k}{2}.$$

Из проведенного анализа следует, что при освещении пластинки светом с длинами волн $\lambda = \lambda_k$ в пограничной области O' происходит интерференция двух колебаний, для которых $a_1 = a_2 = \frac{a_0}{2}$ при $\Delta\varphi = 2k\pi$. В этом случае для результирующего колебания имеем

$$a = a_1 + a_2 = a_0 \text{ и } E = 4E_1 = E_0.$$

Следовательно, в световом пучке, содержащем набор длин волн λ_k, тень от края пластинки возникать не должна, а пограничная область O' при наличии пластинки должна быть освещена так же, как это было бы в ее отсутствие. При освещении же пластинки световым пучком, содержащим промежуточные длины волн λ'_k, имеем по-прежнему $a_1 = a_2 = \frac{a_0}{2}$, но $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$. Поэтому

$$a = a_1 - a_2 = 0 \text{ и } E = a^2 = 0.$$

Значит, тень от края пластинки должна в этом случае возникать, быть резко выраженной и отличаться большой контрастностью.

Залогом получения высококачественной спектральной картины является выполнение следующих требований: край прозрачной пластинки должен быть прямым и ровным (без зазубрин и изгибов); сама пластинка вблизи края должна быть однородной по толщине и оптической плотности; щель *Щ* и щель спектроскопа должны быть достаточно узкими; обе щели и край пластинки должны быть расположены в одной плоскости.

Рисунки 3 и 4 иллюстрируют наблюдаемые в опыте закономерности. Спектральные картины сфотографированы при

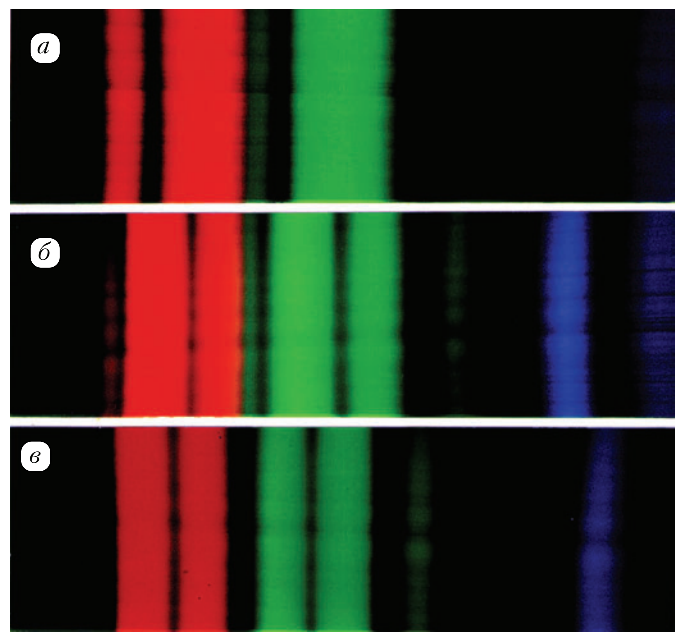


Рис.3. а) Слюда, t = 9 мкм; б) слюда, t = 16 мкм; в) обертка от пачки сигарет, t = 19 мкм

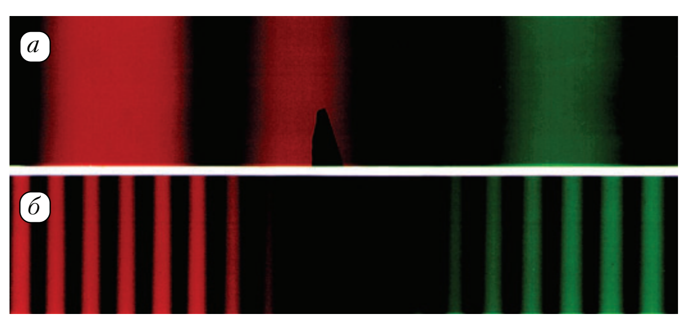


Рис.4. а) Слюда, t = 22 мкм; б) покровное стекло, t = 138 мкм

помощи микрофотонасадки МФН-3. Расстояния c и d в опытах с пластинками из разных прозрачных сред были одинаковы и составляли приблизительно 20 см. Снимок 3 получен при работе со школьным спектроскопом, а снимок 4 – с универсальным монохроматором.

Геометрические шедевры Шарыгина

В.ПРОТАСОВ, В.ТИХОМИРОВ

Творческая жизнь Игоря Федоровича Шарыгина складывалась не вполне обычным образом. Он проявил себя очень одаренным студентом. Закончив Московский университет в 1959 году, он поступил в аспирантуру и успешно завершил ее, защитив диссертацию, где им были получены яркие математические результаты в теории функций и теории приближений. Но вскоре после аспирантуры он оставил «высокую науку» и целиком посвятил себя школьной математике – исследованиям по элементарной геометрии – и развитию математического просвещения. Он оставил множество замечательных книг и статей, но, пожалуй, в наибольшей мере его талант проявился в геометрическом композиторстве, т.е. в создании геометрических шедевров. Этой стороне его творчества и посвящена наша статья. Она написана двумя авторами. Первый из них причисляет себя к ученикам Шарыгина, второй был связан с Игорем Федоровичем почти пятидесятью годами дружбы и творческого взаимодействия.

Как отобрать из огромного геометрического наследия Игоря Федоровича несколько задач для небольшой журнальной статьи? Признаться, для авторов это было большой проблемой. Мы решили поступить просто: написать про те задачи Шарыгина, которые в наибольшей мере понравились и запомнились нам. Это будет, конечно, весьма субъективный взгляд. Хотя, как сказал один замечательный писатель, все мнения всегда субъективны, а объективного мнения не существует вовсе.

Начнем с такой красивой миниатюры.

Задача 1. *В треугольнике ABC с углом B, равным 120°, проведены биссектрисы AA', BB' и CC' (рис.1). Чему равен угол $A'B'C'$?*

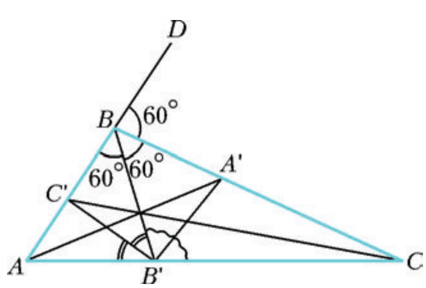


Рис. 1

Задача уникальна тем, что рассчитана на учеников 7 класса средней школы[1], однако вызывает трудности у всех, кто видит ее впервые, включая абитуриентов математических факультетов, победителей олимпиад и профессиональных математиков. Причина проста: эта задача чрезвычайно трудно «считается». Желающие могут попробовать решить ее с помощью теорем синусов, косинусов и формул тригонометрии. Это возможно, но совсем не просто. Подобные «крепкие орешки» сам Игорь Федорович очень ценил. Называя тригонометрию «киллером» геометрии, которая часто позволяет найти короткое счетное решение и тем самым лишить красивую задачу всякой геометрической идеи, он стремился создавать такие задачи, в которых тригонометрия была бы бессильна или слаба. Задача 1 является одним из «антикиллером».

Вот авторское решение задачи, которое мы разбиваем на отдельные пункты, выделяя «логические ходы».

1) Рассмотрим треугольник ABB' (!)(см. рис.1).

2) Угол B в треугольнике ABC равен 120°, следовательно, угол $B'BC$ равен 60°, ибо BB' – биссектриса.

3) Продолжим сторону AB и обозначим через BD луч, продолжающий AB. Тогда угол CBD тоже равен 60°, ибо он дополняет угол B до развернутого угла.

4) Следовательно, BC – это биссектриса внешнего (по отношению к треугольнику ABB') угла $B'BD$.

5) Воспользуемся известной теоремой: *биссектрисы двух внешних и третьего внутреннего углов треугольника пересекаются в одной точке.*

6) Из этой теоремы следует, что $B'A'$ биссектриса (тоже внешнего по отношению к треугольнику ABB') угла $BB'C$ (!).

7) Совершенно аналогично доказывается, что $B'C'$ – биссектриса угла $BB'A$.

8) Значит, угол $A'B'C'$ равен половине развернутого угла $AB'C$, т.е. он равен 90°.

Эта задача может быть сформулирована и в сферической геометрии. Поясним, что это значит. Если вы возьмете модель сферы – резиновый мячик, на котором можете рисовать, – и нарисуете три больших круга, у вас получатся два центрально симметричных сферических треугольника. Рассмотрим один из них. Обозначим его вершины снова A, B и C. В этом треугольнике величины углов определяются как величины углов между касательными к сфере, проведенными в соответствующей вершине. Поэтому можно понять, что значит «угол B равен сто двадцати градусам». Определение биссектрисы такое же, как на плоскости, – это дуга большого круга, проходящая через вершину угла и делящая его пополам. Сохраняется и свойство биссектрисы быть равноудаленной от сторон угла. А потому и формулировка задачи 1, и ее решение, и ответ сохраняются, если ставить задачу на сфере!

А те, кто знают, что такое геометрия Лобачевского, сразу поймут, что и формулировка задачи 1, и ее решение, и ответ сохраняются, если ставить задачу на плоскости Лобачевского.

Все три утверждения вместе объединяет фраза: *задача 1 является фактом абсолютной геометрии* (*т.е. не зависит от аксиомы о параллельных*).

Обсудим вопрос: а на самом деле трудна или нет рассмотренная нами задача 1? Давайте на ее примере пофилософствуем над тем, как оценивать трудность математической проблемы и можно ли вообще это делать.

В принципе, трудность конкретного решения задачи можно оценивать числом логических ходов, но можно эти логические ходы распределять по трем категориям и описывать сложность решения тремя натуральными числами (или нулями), характеризующими *высоту*, *ширину* и *глубину* этого решения.

Высота – это число простых импликаций в решении. Выше мы выделили восемь логических ходов. Некоторые из них – это *простые логические связки*. Таков, например, пункт 2: $\angle B = 120°$, BB' – биссектриса $\Rightarrow \angle B'BC = 60°$.

---

[1] *Она была включена в рабочие тетради для седьмого класса (В.Ю.Протасов, И.Ф.Шарыгин. Геометрия. Рабочая тетрадь. 7 класс. – М.: Дрофа, 1997). Дело в том, что решение задачи не использует ничего, кроме свойства биссектрисы находиться на равных расстояниях от сторон угла.*

Иные же логические ходы – это *отсылки на известные теоремы*. Таков пункт 5. (При этом, разумеется, список «известных теорем» необходимо как-то заранее фиксировать). Число отсылок составляют ширину приводимого решения.

И наконец, два хода отмечены восклицательными знаками – они характеризуют глубину решения. Такова символика комментирования шахматной партии: восклицательными знаками выделяются наиболее замечательные ходы, не вытекающие из поверхностного взгляда на позицию и свидетельствующие об особой изощренности игрока в данный момент. Так и здесь ниоткуда не следует, что разумно рассматривать именно треугольник ABB', но действительно оказывается, что в этом рассмотрении – ключ к решению задачи. А второй восклицательный знак поставлен логическому ходу, где обнаруживается, что $B'A'$ – биссектриса внешнего угла. Тоже прямо ниоткуда не следует, что именно в этом суть дела.

Подведем итог: в нашем решении высота равна пяти, ширина – единице, а глубина – двум. Отметим сразу, что подавляющее большинство геометрических задач Шарыгина обладает нетривиальной глубиной, в частности и в только что определенном значении этого слова.

Но, прервем пока наши философские обсуждения.

Задача 2. *Про четырехугольник ABCD известно, что он вписан в окружность и что существует окружность с центром на стороне AD, касающаяся трех других сторон. Докажите, что AD (длина отрезка) равняется AB + CD.*

Эта задача была придумана Шарыгиным для «Задачника «Кванта» и сразу стала популярной. А через несколько лет она была включена в вариант Международной математической олимпиады, причем не от России (тогда СССР), а от другой страны, и, конечно же, без ссылки на автора. Один из близких друзей Игоря Федоровича заметил как-то, что Шарыгина постоянно обкрадывали.

Снова попробуем оценить сложность приводимого далее решения.

1) Проведем окружность через точки B, C и O, где $O \in AD$ – центр окружности, касающейся AB, BC и CD (!) (рис.2,*а*).

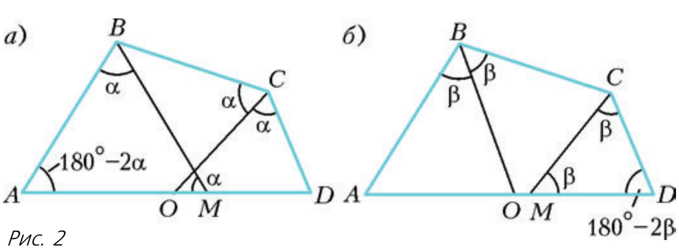


Рис. 2

2) Пусть M – другая точка (может быть, совпадающая с O), в которой окружность пункта 1 пересекает прямую AD, угол AMB обозначим через α (!).

3) Четырехугольник $OBCM$ – вписанный, и потому $\angle BCO = \alpha$.

4) Стороны CB и CD касаются (по условию задачи) окружности с центром O, и потому CO – биссектриса.

5) Из п.4 и 3 следует, что $\angle BCD = 2\alpha$.

6) Четырехугольник $ABCD$ вписанный (по условию), следовательно, из п.5 вытекает, что, $\angle BAD = 180° - 2\alpha$.

7) В треугольнике ABM известны два угла A и M, следовательно, $\angle ABM$ равен $180° - (180° - 2\alpha + \alpha) = \alpha$.

8) Из п.7. следует, что треугольник ABM равнобедренный, т.е. $AB = AM$

9) Аналогично доказывается, что $CD = DM$ (рис.2,*б*), откуда и следует утверждение задачи.

Мы видим, что здесь 9 логических ходов, два восклицательных знака (то, что через три точки B, C и O надо проводить окружность, – это изобретение, это акт наития или творческой силы, потому и стоит первый восклицательный знак, но то, что важнейшую роль сыграет точка M, тоже очень нестандартно). И широта приведенного решения весьма значительная: п.3 – теорема о равенстве углов, опирающихся на одну и ту же дугу; п.4 – теорема о биссектрисе; п.6 – теорема о сумме противоположных углов вписанного четырехугольника; п.7 – теорема о сумме углов треугольника; наконец, п.9 – теорема о равенстве углов равнобедренного треугольника.

Итак, высота приведенного решения равна двум, ширина – пяти и глубина – тоже двум.

В 1993 году старшему из авторов этой статьи было поручено возглавить жюри очередной Московской математической олимпиады. Естественно было обратиться к И.Ф.Шарыгину с просьбой придумать задачи к ней. Вот его задача для 9 класса. Она шла под шестым номером, как самая трудная.

Задача 3. *Дан четырехугольник ABCD. Известно, что* $\angle BAC = 30°$, $\angle D = 150°$ *и, кроме того,* $AB = BD$. *Требуется доказать, что AC – биссектриса угла C.*

Вот авторское решение задачи.

1) Пусть B' – точка, симметричная B относительно AC (рис.3,*а*).

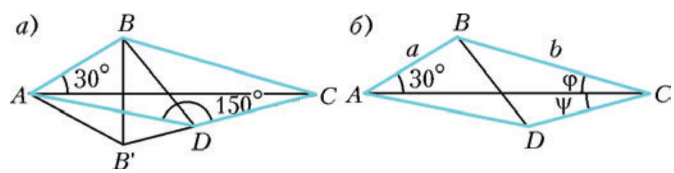


Рис. 3

2) В силу симметрии, $AB = AB'$ и $\angle BAC = \angle B'AC$.

3) Из п. 2 следует, что треугольник ABB' равносторонний.

4) Из п. 3 и условия $AB = BD$ вытекает, что точки A, B' и D лежат на окружности с центром в B (радиуса AB) (!).

5) Из п.3 и 4 вытекает, что угол ADB' опирается на дугу в 60°.

6) Из п.5 следует, что $\angle ADB' = 30°$.

7) Из п.6 получаем, что точка D лежит на одной прямой с B' и C.

8) Следовательно, прямая CD симметрична CB, т.е. AC – биссектриса угла BCD, что и требовалось.

Но продолжим наше философствование. А как же все-таки оценивать сложность самой задачи, а не ее решения? Можно поступить так, как часто математики и поступают: в качестве оценки сложности задачи можно взять минимум сложности по всем имеющимся решениям. Попробуем приложить эту идеологию к задаче 3.

До сих пор было рассказано о геометрических решениях. А сейчас будет представлено аналитическое решение задачи 3.

Очень старый и глубокий вопрос многими математиками ставился так: что лучше – алгебра и анализ или геометрия? Как вы уже наверняка поняли, И.Ф.Шарыгин был сторонником именно геометрии, и первый автор этой статьи такое мнение всегда разделял. Второй автор посвятил обсуждению этого вопроса несколько статей (в частности, в «Кванте»), стараясь защитить концепцию, что не следует упорядочивать несравнимое, не нужно отдавать предпочтение чему-то одному, неразумно явным образом становиться на одну из двух сторон. Мир наполнен двойственностью, вещами, которые неразрывно связаны друг с другом, но дают возможность посмотреть на мир с двух разных сторон. И вот такими двумя разными сторонами являются геометрия и алгебра.

Переходим теперь к описанию аналитического решения.

1) Обозначим $\angle BCA$ через φ, а $\angle DCA$ – через ψ, сторону AB обозначим через a, а BC – через b (рис.3,*б*).

2) Из треугольника ABC по теореме синусов получаем

$$\frac{a}{\sin\varphi} = \frac{b}{\sin 30^\circ} = 2b\,. \qquad (1)$$

3) Обозначим $\angle CAD$ через χ; из условия ($\angle ADC = 150^\circ$), п.1 и теоремы о сумме углов треугольника вытекает равенство

$$\chi = 180^\circ - 150^\circ - \psi = 30^\circ - \psi\,.$$

4) Из условий задачи ($\angle BAC = 30^\circ$ и $AB = BD$) и п.3 следует, что $\angle A = 60^\circ - \psi = \angle BDA$.

5) Из п.4 следует, что $\angle BDC = 90^\circ + \psi$.

6) По теореме синусов из треугольника CBD следует соотношение

$$\frac{a}{\sin(\varphi+\psi)} = \frac{b}{\sin(90^\circ+\psi)}\,. \qquad (2)$$

7) Из (1) и (2) получаем

$$\sin(\varphi+\psi) = 2\sin\varphi\cos\psi\,.$$

8) Раскрывая синус суммы, приходим к равенству

$$\sin\varphi\cos\psi = \cos\varphi\sin\psi\,.$$

9) Из п.8 следует, что $\varphi = \psi$. Задача решена.

Как сравнить приведенные решения? Импликаций в аналитическом решении чуть больше, но восклицательных знаков там совсем нет: задачу можно признать *стандартной*. Возможны различные предпочтения: опытные геометры проголосуют за первое, неопытные, но владеющие тригонометрией, – за второе решение. На олимпиаде эту задачу решили 5–6 человек, и был лишь один плюс-минус за аналитическое решение.

И еще один, в каком-то смысле драматический, момент в жизни второго автора связан с И.Ф.Шарыгиным. Это случилось летом 1984 года. Шла подготовка к очередной Международной математической олимпиаде. Происходила эта подготовка под Москвой, в доме отдыха. Туда привезли команду, и разные математики приезжали ее тренировать. Попросили принять участие и второго из авторов этой статьи. А он как раз тогда писал свою книжку «Рассказы о максимумах и минимумах» и пропагандировал мысль, что большинство задач плоской геометрии на максимум и минимум можно решить так: надо их формализовать разумным образом, а потом применять либо теорему Ферма о том, что в точках максимума и минимума производная равняется нулю, либо правило множителей Лагранжа. И будущим олимпийцам крайне неосторожно было предложено давать лектору геометрические задачи на максимум и минимум, а он будет их немедленно решать по своей методе (которая в лекции была уже изложена). А потом олимпийцам предлагалось рассказывать свои решения и сравнивать «кто кого». Это предложение вызвало бурное веселье: олимпийцы были уверены в том, что победа будет за ними, тем более что незадолго до того их учил геометрии сам Игорь Федорович Шарыгин.

Вот одна из тех задач, автором которой был, конечно, Игорь Федорович; она фигурировала на Московской олимпиаде в 1980 году.

Задача 4. *Дан круг с центром O, AC – диаметр круга. На OC дана точка F. Спрашивается, как провести хорду BD через точку F так, чтобы площадь четырехугольника ABCD была максимальной?*

Вот решение И.Ф.Шарыгина.

1) Рассмотрим треугольники ABC и OBF (рис.4,*а*).

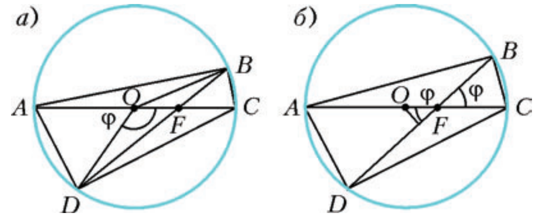


Рис. 4

2) У этих треугольников высоты одинаковые, следовательно, площади относятся так же, как OF относится к AC.

3) Аналогично получаем

$$\frac{S_{OBF}}{S_{ABC}} = \frac{OF}{AC} = \frac{S_{ODF}}{S_{ADC}}\,.$$

4) Следовательно, суммируя, получаем, что

$$\frac{S_{OBD}}{S_{ABCD}} = \frac{OF}{AC}\,.$$

5) Значит, вместо того чтобы максимизировать площадь четырехугольника, возможно максимизировать площадь треугольника OBD.

6) Или, что то же самое, максимизировать $\sin\angle BOD$. В этом месте возникает красивая неожиданность – «смена режима».

7) Обозначим угол BOD через φ. Наилучший угол обозначим $\hat\varphi$. Очевидно, что $\varphi_0 \le \pi$, где φ_0 соответствует случаю перпендикулярности AC и BD, и потому, если $\varphi_0 \le \pi/2$, то максимальная площадь соответствует значению $\hat\varphi = \pi/2$, если же $\varphi_0 > \pi/2$, то $\hat\varphi = \varphi_0$.

(Читателю предоставляется возможность самостоятельно найти число логических ходов в этом рассуждении.)

Так вот, школьники-олимпийцы предложили лектору решить эту задачу с помощью производных. Вот каким оказалось решение.

1) Сначала надо формализовать задачу. Пусть $AC = 1$, $OF = a$, а угол BFC обозначим φ (рис.4,*б*).

2) Олимпийцы подсказали, что площадь четырехугольника, вписанного в окружность, равна полупроизведению диагоналей на синус (острого) угла между ними.

3) Длина второй диагонали BD равна $2\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}$.

4) Из п.2 и 3 следует, что надо найти максимум функции $g(\varphi) = \sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}\,\sin\varphi$ при условии, что $0 \le \varphi \le \pi/2$.

5) Делаем замену $a\sin\varphi = \sqrt{z}$ и приходим к задаче о нахождении минимума функции $f(z) = (1-z)z$ при условии, что $0 \le z \le a^2$.

Это – простая задача, и можно ограничиться лишь выписыванием ответа: если $0 \le a \le \frac{1}{\sqrt2}$, то $\hat z = a^2$, т.е. $\hat\varphi = \frac{\pi}{2}$; если же $\frac{1}{\sqrt2} < a \le 1$, то $\hat z = \frac12$, т.е. $\hat\varphi = \arcsin\frac{1}{a\sqrt2}$.

Теперь судите сами, какое решение проще – геометрическое или аналитическое.

С этой задачей лектор справился достаточно успешно, и тогда рассерженные олимпийцы дали ему еще одну задачу, про которую уже твердо были уверены, что лектору ее не осилить. И действительно, сходу у него ничего не получилось, и он вынужден был взять тайм-аут, сказав: «Пойдите-ка попейте чайку!» А за время тайм-аута кое-как все же справился с решением.

Вот эта задача: *Дан угол A и в нем внутри две точки M и N. Как провести прямую BC через точку M так, чтобы* *площадь четырехугольника ABNC была минимальной (точки B и C лежат на сторонах угла A)?*

Читателю предлагается самостоятельно ее решить, а о том, как она решается с помощью анализа, можно прочитать в книге «Рассказы о максимумах и минимумах» (Библиотечка «Квант», вып.56).

Возможность аналитического решения не может бросить тень на две последние задачи: в обеих скрыто истинное изящество.

А вот еще один шедевр Шарыгина. Правда, Игорю Федоровичу он принадлежит лишь отчасти, сама задача довольно старая. Но – все по порядку.

Задача 5 (обобщенная теорема о бабочке). *На окружности дана хорда AB, на ней – точки M и N, причем $AM = BN$. Через точки M и N проведены хорды PQ и RS соответственно. Прямые QS и RP пересекают AB в точках K и L. Докажите, что $AK = BL$.*

История этой задачи довольно запутанная.

Дело в том, что ей предшествовала не обобщенная, а классическая теорема о бабочке. Классическая теорема о бабочке соответствует случаю $M = N$, т.е. все то же самое, но изначально берется только одна точка M – середина хорды AB, через нее проводятся две произвольные хорды PQ и RS и утверждается, что $AK = BL$, где K и L – точки пересечения прямой AB с прямыми QS и RP соответственно. Классическая теорема о бабочке была очень известна и популярна. Появилась она довольно давно – в 1815 году в английском журнале «Gentleman's Dairy» (тогда не предполагалось, что женщины могут заниматься математикой, поэтому математические задачи публиковались в мужских журналах). На протяжении всех последующих лет «бабочка» доставляла истинное удовольствие каждому, кому доводилось с ней познакомиться. И, что интересно, были постоянные публикации, посвященные этой задаче, число этих публикаций перевалило за несколько сотен. Существует огромное количество разных решений этой задачи – например, в известной книжке Д.О.Шклярского, Н.Н.Ченцова и И.М.Яглома «Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум», в книге В.В.Прасолова «Задачи по планиметрии» и, естественно, в задачниках Шарыгина.

А как же родилась обобщенная теорема о бабочке? Будучи убежден, что красивая геометрическая теорема должна иметь чисто геометрическое доказательство, Игорь Федорович придумал такое доказательство для (классической) теоремы о бабочке. А потом просто заметил, что ничего не изменится в доказательстве, если «раздвоить» точку M на пару симметричных точек M и N. Так, спустя более чем полтора столетия, родилось естественное обобщение теоремы о бабочке. Это еще раз подтверждает совершенно особое положение элементарной геометрии. Геометрические теоремы и задачи всегда свежи и никогда не устаревают!

Рассмотрим подробнее то самое геометрическое решение, единое для классической и для обобщенной «бабочек».

Сделаем симметрию относительно серединного перпендикуляра к хорде AB. Окружность при этом перейдет в себя, точки N, Q, R – в точки M, Q', R' соответственно. Докажем, что прямые $Q'K$ и $R'M$ пересекаются на окружности, из этого будет следовать, что симметрия перевела точку L в точку K, что и требовалось. Для этого обозначим через V вторую точку пересечения исходной окружности с окружностью PMK. Так как четырехугольники $PMKV$ и $PQQ'V$ – вписанные, то $\angle QPV = 180° - \angle MKL = 180° - \angle QQ'V$, следовательно, $\angle MKL = \angle QQ'V$. С учетом того, что прямые QQ' и MK параллельны, отсюда вытекает, что точки V, K, Q' лежат на одной прямой. Итак, прямая $Q'K$ проходит через точку V. Точно так же доказывается, что прямая $R'M$ проходит через V. Таким образом, $Q'K$ и $R'M$ пересекаются на исходной окружности, что и требовалось доказать.

Следующая задача Шарыгина предлагалась на одной из Всесоюзных олимпиад по математике.

Задача 6. *В пространстве даны сфера и две точки A и B такие, что прямая AB не пересекает сферу. Рассматриваются всевозможные тетраэдры ABMN, для которых данная сфера является вписанной. Докажите, что сумма углов пространственного четырехугольника AMBN (т.е. сумма углов AMB, MBN, BNA и NAM) не зависит от выбора точек M и N.*

Эта замечательная задача также являет собой пример «антикиллера». Она очень трудно считается, а геометрически решается наглядно и естественно, фактически – в один прием.

Обозначим через Q, S, P и R точки касания вписанной сферы с гранями AMB, ANB, BMN и AMN соответственно. Поскольку $BQ = BS$, как расстояния от точки B то точек касания прямых BQ и BS со сферой, и, аналогично, $AQ = AS$, то треугольники AQB и AQS равны по трем сторонам. Далее остается лишь аккуратный подсчет углов. Во-первых, $\angle ABQ = \angle ABS$ и $\angle BAQ = \angle BAS$. Так же доказываем, что $\angle MBP = \angle MBQ$ и $\angle NBP = \angle NBS$. Сложив два последних равенства, получаем

$$\angle ABM + \angle ABN - \angle MBN = \angle ABQ + \angle ABS = 2\angle ABQ .$$

Аналогично,

$$\angle BAM + \angle BAN - \angle MAN = 2\angle BAQ .$$

Таким образом,

$$\angle ABM + \angle BAM + \angle ABN + \angle BAN - \angle MBN - \angle MAN = 2\angle ABQ + 2\angle BAQ .$$

Заметим, что сумма первых двух слагаемых равна $180° - \angle AMB$ сумма третьего и четвертого равна $180° - \angle ANB$, а правая часть равна $360° - 2\angle AQB$. Следовательно, сумма $\angle AMB + \angle MBN + \angle BNA + \angle NAM$ равна $2\angle AQB$, а значит, не зависит от выбора точек M и N.

Задача эта была предложена на олимпиаде последним номером, т.е. как сложная задача. Она и в самом деле сложная, если не знать решения заранее. А ведь в ее решении используются только признаки равенства треугольников и теорема о равенстве касательных, проведенных из одной точки к сфере!

Теперь приведем еще несколько задач Шарыгина без разбора их решений.

Задача 7 (задача Лебега для треугольника). *Найдите минимально возможную площадь треугольника, которым можно покрыть любой треугольник со сторонами, не превосходящими единицы.*

История этой задачи также занимательна.

Автор ее – великий французский математик Анри Леон Лебег. Свою первую работу он написал в 1899 году, а уже к 1902 году стал классиком математики. Лебег внес неоценимый вклад не только в ключевые направления математики XX века, но и в историю российской математики. Так сложилось, что Московская математическая школа начала развиваться в основном вдохновленная идеями Лебега, а затем разрослась в крупнейшую математическую школу не только в России, но и в мире. В классической формулировке задачи Лебега требовалось найти фигуру минимальной площади, покрывающей любую фигуру диаметра 1.

И.Ф.Шарыгин переносит эту задачу на треугольник и находит совершенно элементарное решение[2]. Мы не будем

[2] *Оно опубликовано в книге: И.Ф.Шарыгин. Геометрия 9–11. – М.: Дрофа, 1996 (задача №677).*

приводить это решение, сообщим лишь ответ, который, на наш взгляд, совершенно удивительный. Оптимальным является треугольник ABC, у которого $AB = 1$, $\angle A = 60°$, а высота, опущенная на сторону AB, равна $\cos 10°$. Что здесь необычного, спросите вы? Дело в том, что мы никогда не встречали ни одной экстремальной задачи (а математическая специальность авторов этой статьи – теория экстремума), у которой в ответе фигурировал бы угол 10°. Бывают «табличные» углы (120°, 90°, 60° и т.д.), на худой конец 72°, 36°... Но чтобы угол в 10° возник в совершенно естественной задаче на минимум – это удивительно!

Игорю Федоровичу везло на подобные вещи – либо необычные, нестандартные задачи, либо совершенно удивительные ответы в естественных, казалось бы, задачах. Приведем здесь еще один подобный пример.

Каждый из вас на уроках геометрии имел дело с развертками многогранников. Развертка, наряду с сечением, помогает свести стереометрическую задачу к одной или нескольким планиметрическим. А задавали ли вы себе вопрос: почему развертка вообще существует? Всегда ли многогранник можно развернуть на плоскость? Вдруг какие-то грани на развертке пересекутся? Тогда фигуру, получающуюся в развертке, нельзя будет вырезать из одного плоского листа бумаги. Существование подобных аномальных разверток долгое время было проблемой, занимавшей умы геометров. В результате были построены примеры многогранников, чьи развертки нельзя уложить на плоскость без самопересечений. Примеры были, конечно же, сложные. Но в 1997 году московский математик Алексей Тарасов (в то время он был студентом мехмата МГУ) придумал совершенно элементарный пример: он обнаружил, что существуют правильные треугольные усеченные пирамиды, развертки которых имеют самопересечения. Узнав о примере Тарасова, Игорь Федорович тут же формулирует его в виде задачи и включает в вариант III Соросовской олимпиады.

Все-таки, удивительная вещь – геометрия! В какой еще науке новейшие достижения (а пример Тарасова несомненно является таковым) могут быть на следующий день принесены в класс для разбора со школьниками или предложены в качестве задачи на олимпиаде?

Вот эта задача.

Задача 8. *Пусть $ABCD$ – правильная треугольная пирамида с основанием ABC и плоскими углами при вершине D, равными α. Плоскость, параллельная ABC, пересекает AD, BD и CD в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Поверхность многогранника $ABCA_1B_1C_1$ разрезана по пяти ребрам: A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CA и AB. При каких значениях α получившаяся развертка будет обязательно накрывать сама себя?*

Интересно, что задачу эту Игорь Федорович поставил под номером 2 (из пяти, предлагавшихся в первый день олимпиады), т.е. как легкую! Но, главным образом, интересен и необычен ответ. Он такой: при $\alpha \ge 100°$. Когда первый автор этой статьи проводил разбор задач после олимпиады, сразу несколько человек в зале воскликнули: «А разве может быть в геометрической задаче такой ответ? Сто градусов – это ведь относится скорее к физике!» (имелась в виду, видимо, температура кипения воды в нормальных условиях). И ведь они правы. Каждый, кто серьезно занимался геометрией, знает, что в нормальной геометрической задаче такого ответа быть не может! И тем не менее...

Еще одна задача.

Задача 9. *Обязательно ли равнобедренным является треугольник, если треугольник с вершинами в основаниях его биссектрис – равнобедренный?*

Решение этой задачи (см. задачу №500 в упомянутой ранее книге) не столь простое, как может показаться на первый взгляд. Это один из немногих случаев, когда И.Ф.Шарыгин не нашел геометрического решения задачи и прибег к вычислениям. Скорее всего, чисто геометрического решения здесь не существует, что ясно уже из ответа. А ответ весьма неожиданный: треугольник не обязательно равнобедренный, но только в том случае, когда один из его углов лежит в интервале $\left(\arccos\frac{\sqrt{17}-5}{4}; \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$, т.е. примерно от 102° до 104°. Если же треугольник не имеет тупых углов или имеет, но тупой угол не лежит в этом узком интервале, то треугольник обязательно равнобедренный.

Перед формулировкой следующей задачи Шарыгина напомним, что такое прямая Симсона. Пусть дан треугольник ABC и точка M в плоскости этого треугольника. Три проекции точки M на стороны треугольника ABC лежат на одной прямой тогда и только тогда когда M лежит на описанной окружности треугольника ABC. Эта прямая называется прямой Симсона точки M относительно треугольника ABC.

Задача 10 (прямая Симсона n-угольника). *Дан четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность, и произвольная точка M этой окружности. Точка M проецируется на прямые Симсона этой точки относительно четырех треугольников ABC, ABD, ACD, DCD. Тогда 4 получившиеся проекции лежат на одной прямой (прямой Симсона точки M относительно четырехугольника $ABCD$).*

Далее по индукции определяется прямая Симсона n-угольника:

Пусть дан n-угольник, вписанный в окружность, и произвольная точка M этой окружности. Точка M проецируется на прямые Симсона этой точки относительно всех n $(n-1)$-угольников с вершинами в вершинах данного n-угольника. Тогда n получившихся проекций лежат на одной прямой (прямой Симсона точки M относительно n-угольника).

Это – задача №613 из упомянутой книги.

В заключение – еще две задачи.

Задача 11 (задача №676). *В данном треугольнике провели медиану к наибольшей стороне, в каждом из получившихся двух треугольников проделали то же самое, получили 4 треугольника и так далее. Докажите, что все получающиеся таким образом треугольники можно разбить на конечное число классов подобных между собой треугольников.*

Задача 12. *Вокруг окружности радиуса 1 описан многоугольник площади S_1. Точки касания его сторон с окружностью соединили, получив многоугольник площади S_2. Каково наименьшее возможное значение суммы $S_1 + S_2$?*

Ответ в задаче: 6. Достигается на квадрате и только на нем. Ни авторского, ни какого-либо другого решения этой задачи мы, увы, не знаем. Сама задача была сообщена Игорем Федоровичем в частной беседе с первым автором этой статьи, было это около 20 лет назад. Шарыгин был немного разочарован «неинтересным» ответом к задаче. Говорил, что во время расчетов возлагал надежды на один пятиугольник, в котором число 6 почти достигалось, однако потом выяснилось, что он все равно хуже квадрата. Насколько нам известно, результата этого он не публиковал, возможно, из-за громоздкости решения или потому, что, как всегда, надеялся найти красивое геометрическое решение.

Может быть, это удастся вам, дорогой читатель? Тогда присылайте свои решения нам – авторам статьи – на адрес редакции журнала «Квант». Ждем ваших решений и хотим вас призвать, как всегда призывал Игорь Федорович своих читателей и слушателей: «Занимайтесь геометрией! Польза геометрии не в достижении результата, а в самих занятиях! Потому что геометрия – это витамин для мозга!»

Задачи с жидкостями

В.МОЖАЕВ

В этой статье будут рассмотрены задачи, в которых жидкость, с одной стороны, является средой, где находятся твердые тела, а с другой стороны, она, как жидкий элемент, участвует в движении, подобно твердому телу. Наиболее сложными являются комбинированные задачи, в которых жидкость движется вместе с находящимся в ней твердым телом (например, разобранная ниже задача 6).

Перейдем к обсуждению конкретных задач.

Задача 1. *В цилиндрический сосуд с водой опустили кусок льда, в который вморожен осколок стекла. При этом уровень воды в сосуде поднялся на h = 11 мм, а лед остался на плаву, целиком погрузившись в воду. На сколько опустится уровень воды в сосуде после того, как весь лед растает? Плотность воды* $\rho_{\text{в}} = 1\ \text{г/см}^3$, *плотность льда* $\rho_{\text{л}} = 0,9\ \text{г/см}^3$, *стекла* $\rho_{\text{ст}} = 2,0\ \text{г/см}^3$.

Обозначим первоначальный объем льда через $V_{\text{л}}$, а объем стекла – через $V_{\text{ст}}$. Когда кусок льда полностью погрузился в воду, он вытеснил объем воды, равный

$$V_{\text{выт}} = V_{\text{л}} + V_{\text{ст}}.$$

Очевидно, что этот же объем равен

$$V_{\text{выт}} = hS,$$

где S – площадь поперечного сечения сосуда.

Теперь запишем условие плавания куска льда с вмороженным осколком стекла – суммарная сила тяжести льда и стекла равна выталкивающей силе:

$$\rho_{\text{л}} g V_{\text{л}} + \rho_{\text{ст}} g V_{\text{ст}} = \rho_{\text{в}} g \left(V_{\text{л}} + V_{\text{ст}}\right).$$

Из совместного решения полученных уравнений найдем объемы льда и стекла:

$$V_{\text{л}} = \frac{\left(\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}}\right) hS}{\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{л}}},\quad V_{\text{ст}} = \frac{\left(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}\right) hS}{\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{л}}}.$$

Из растаявшего льда образовалась вода объемом

$$V_{\text{в}} = \frac{\rho_{\text{л}} V_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} = \frac{\rho_{\text{л}} \left(\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}}\right) hS}{\rho_{\text{в}} \left(\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{л}}\right)}.$$

Поскольку кусок стекла остается в воде, понижение уровня воды в сосуде за время таяния льда будет равно

$$\Delta h = \frac{V_{\text{л}} - V_{\text{в}}}{S} = \frac{\left(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}\right)\left(\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}}\right)}{\rho_{\text{в}} \left(\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{л}}\right)} h = 1\ \text{мм}.$$

Задача 2. *В вертикально расположенной трубке – с открытым верхним концом, с постоянным внутренним сечением и длиной 3L = 1080 мм – столбиком ртути длиной L заперт слой воздуха такой же длины. Какой длины столб ртути останется в трубке, если ее перевернуть открытым концом вниз? Внешнее давление* $p_0 = 774$ *мм рт.ст.*

Обозначим давление воздуха под ртутным столбиком в исходном положении трубки через p_1. Тогда условие равновесия столбика ртути длиной L запишется в виде

$$p_1 = p_0 + \rho g L,$$

где ρ – плотность ртути. Предположим, что после переворота трубки и установления первоначальной температуры часть ртути выльется. Обозначим через h длину столбика оставшейся в трубке ртути. Новое условие равновесия будет иметь вид

$$p_2 + \rho g h = p_0,$$

где p_2 – новое давление воздуха над ртутным столбиком.

Условие сохранения количества изолированного воздуха позволяет записать

$$p_1 L = p_2 \left(3L - h\right).$$

Подставляя сюда p_1 из первого равенства, а p_2 – из второго, получим уравнение относительно h:

$$\left(p_0 + \rho g L\right) L = \left(p_0 - \rho g h\right)\left(3L - h\right),$$

или, если записать атмосферное давление в виде $p_0 = \rho g H_0$, где $H_0 = 774$ мм:

$$h^2 - \left(3L + H_0\right) h + L\left(2H_0 - L\right) = 0.$$

Для данных численных значений L и H_0 (в мм) получается, что

$$h = 270\ \text{мм}.$$

Задача 3. U-*образная трубка расположена вертикально и заполнена жидкостью. Один конец трубки открыт в атмосферу, а другой конец соединен с сосудом объемом* $V_0 = 0,1$ *л, заполненным гелием (рис.1). Объем всей трубки равен объему этого сосуда. В некоторый момент гелий начинают медленно нагревать. Какое минимальное количество теплоты необходимо подвести к гелию, чтобы вся жидкость вылилась из трубки? Атмосферное давление* $p_0 = 10^5$ *Па; длины трех колен трубки одинаковы; давление, создаваемое столбом жидкости в вертикальном колене, равно* $p_0/8$.

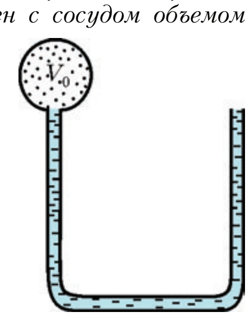


Рис. 1

Обозначим полную длину трубки через $3L$, а площадь внутреннего поперечного сечения трубки – через S. Поскольку объем трубки V_0, то длина каждого колена

$$L = \frac{V_0}{3S}.$$

Весь процесс нагрева гелия можно разбить на три участка. Первый участок – это когда жидкость еще находится в левом вертикальном колене. Рассмотрим момент времени, когда уровень жидкости в левом колене переместился на величину z, $0 \le z \le L$. Из условия равновесия жидкости в трубке найдем давление гелия:

$$p = p_0 + \rho_{\text{ж}} g z,$$

где $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости. На втором участке, для которого $L \le z \le 2L$, давление гелия

$$p = p_0 + \rho_{\text{ж}} g L = \text{const},$$

а на третьем участке, для $2L \le z \le 3L$, –

$$p = p_0 + \rho_{\text{ж}} g \left(3L - z\right).$$

На рисунке 2 изображен график зависимости давления

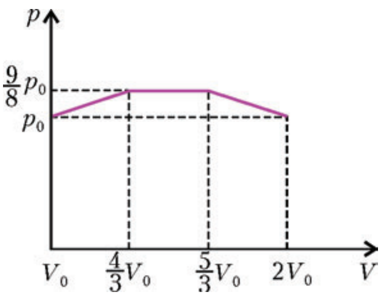


Рис. 2

гелия от его объема V, который связан со смещением z простым соотношением:

$$V = V_0 + Sz .$$

На первых двух участках тепло необходимо подводить к гелию – это однозначно: здесь газ, расширяясь, совершает работу и одновременно нагревается. А вот третий участок неоднозначен: здесь газ также совершает работу, но при этом он может и охлаждаться. Убедимся, что и на этом участке тепло тоже подводится.

Учитывая, что $\rho_{ж} gL = p_0/8$, запишем уравнение процесса для третьего участка в виде

$$p = \frac{p_0}{8}\left(14 - 3\frac{V}{V_0}\right).$$

Рассмотрим малое изменение объема ΔV. Тогда работа, совершенная гелием, равна

$$\Delta A = p\Delta V = \frac{p_0}{8}\left(14 - 3\frac{V}{V_0}\right)\Delta V .$$

Запишем уравнение состояния гелия как идеального газа:

$$pV = \nu RT ,$$

где ν – количество вещества, T – температура газа. Подставим в это уравнение выражение для давления на третьем участке процесса и получим

$$\frac{p_0}{8}\left(14V - 3\frac{V^2}{V_0}\right) = \nu RT .$$

Продифференцируем обе части этого уравнения:

$$\frac{p_0}{8}\left(14 - 6\frac{V}{V_0}\right)\Delta V = \nu R\Delta T .$$

Теперь найдем изменение внутренней энергии гелия при изменении объема на ΔV:

$$\Delta U = C_V \nu\Delta T = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3p_0}{16}\left(14 - 6\frac{V}{V_0}\right)\Delta V .$$

Согласно первому началу термодинамики, подведенное количество теплоты равно сумме изменения внутренней энергии газа и совершенной им работы:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A = \frac{p_0}{8}\left(35 - 12\frac{V}{V_0}\right)\Delta V .$$

Легко убедиться, что при $\frac{5}{3} \le \frac{V}{V_0} \le 2$ и $\Delta V > 0$

$$\Delta Q > 0 .$$

Итак, на всех участках тепло подводится, поэтому полное подведенное к гелию количество теплоты Q найдем как сумму полного изменения внутренней энергии и полной работы, которую совершил гелий:

$$Q = \left(U_{к} - U_{н}\right) + A .$$

Поскольку начальная и конечная температуры равны, соответственно,

$$T_{н} = \frac{p_0V_0}{\nu R} \text{ и } T_{к} = \frac{2p_0V_0}{\nu R} ,$$

то изменение внутренней энергии равно

$$U_{к} - U_{н} = \frac{3}{2}\nu R\left(T_{к} - T_{н}\right) = \frac{3}{2}p_0V_0 .$$

Полную работу найдем как площадь под кривой на рисунке 2:

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{8}p_0 + p_0\right)\frac{V_0}{3} + \frac{9}{8}p_0\frac{V_0}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{8}p_0 + p_0\right)\frac{V_0}{3} = \frac{13}{12}p_0V_0 .$$

Тогда окончательно

$$Q = \left(\frac{3}{2} + \frac{13}{12}\right)p_0V_0 = \frac{31}{12}p_0V_0 \approx 26 \text{ Дж} .$$

Задача 4. *«Тройник» с двумя открытыми в атмосферу вертикальными трубками и одной закрытой (горизонтальная трубка) полностью заполнен водой (рис.3). После того, как тройник начали двигать по горизонтали в плоскости рисунка влево с некоторым постоянным ускорением, из него вылилась 1/16 массы всей воды. Чему при этом стало равно давление в жидкости у закрытого конца – в точке A? Трубки имеют одинаковые внутренние сечения. Длину L считать заданной. Диаметр трубок мал по сравнению с длиной L.*

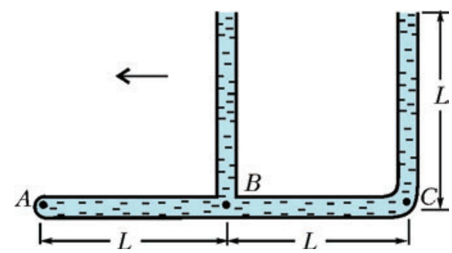


Рис. 3

При движении тройника влево с ускорением a гидростатические давления в точках A, B и C (см. рис.3) связаны между собой уравнением движения воды в горизонтальной трубке:

$$\rho La = p_B - p_A , \; 2\rho La = p_C - p_A ,$$

где ρ – плотность воды. Давление в точке C больше давления в точке B, поэтому вода будет выливаться из правой вертикальной трубки. Из условия неразрывности струи жидкость при этом будет отсасываться из левой вертикальной трубки. В установившемся режиме правая трубка будет полностью заполнена водой, а левая – частично. Поскольку вылилась $1/16$ массы всей воды, что соответствует массе воды в части трубки длиной $L/4$, то в левой трубке останется столбик воды высотой $\frac{3}{4}L$. Поэтому давления в точках B и C будут равны

$$p_B = p_0 + \frac{3}{4}\rho gL \text{ и } p_C = p_0 + \rho gL ,$$

где p_0 – атмосферное давление.

Исключая из всех уравнений p_B и p_C, получим систему двух уравнений относительно p_A и a:

$$\begin{cases} p_A + \rho La = p_0 + \frac{3}{4}\rho gL, \\ p_A + 2\rho La = p_0 + \rho gL. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно p_A, найдем

$$p_A = p_0 + \frac{1}{2}\rho gL .$$

Задача 5. *Тонкая, запаянная с одного конца и изогнутая под прямым углом трубка заполнена ртутью и закреплена*

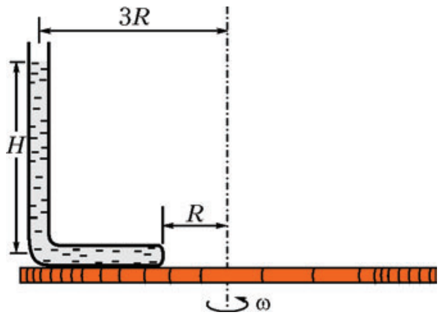


Рис. 4

на горизонтальной платформе, которая вращается с угловой скоростью ω *вокруг вертикальной оси (рис.4). При вращении платформы ртуть не выливается и полностью заполняет горизонтальное колено. Открытое колено трубки вертикально. Геометрические размеры установки указаны на рисунке; атмосферное давление* p_0*; плотность ртути* ρ *. Найдите давление ртути у запаянного конца трубки.*

Выделим в горизонтальной части трубки небольшой элемент ртути длиной dr, расположенный на произвольном расстоянии r от оси вращения (рис.5). Этот элемент вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω. Запишем уравнение движения выделенного элемента:

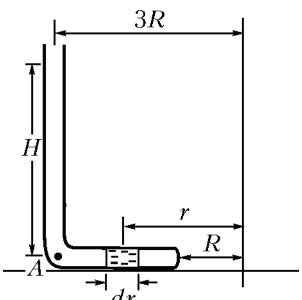


Рис. 5

$$\rho S\omega^2 r\,dr = S dp ,$$

где S – площадь поперечного сечения трубки, dp – разность давлений между левым концом элемента ртути и правым. После сокращения на S получим связь между малыми приращениями dp и dr:

$$dp = \rho\omega^2 r\,dr .$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения и получим

$$p = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} + \text{const} .$$

Константу определим из условия, что при $r = 3R$ (точка A) давление равно $p_0 + \rho g H$:

$$p_0 + \rho g H = \frac{9\rho\omega^2 R^2}{2} + \text{const} ,$$

и получим зависимость $p(r)$:

$$p(r) = p_0 + \rho g H - \frac{9\rho\omega^2 R^2}{2} + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} .$$

Отсюда найдем давление ртути у запаянного конца трубки $(r = R)$:

$$p(R) = p_0 + \rho g H - 4\rho\omega^2 R^2 .$$

Задача 6. *Стеклянный шар объемом* V *и плотностью* ρ *находится в сосуде с водой (рис.6). Угол между стенкой сосуда и горизонтальным дном* α *, внутренняя поверхность сосуда гладкая, плотность воды* ρ_0 *. Найдите силу давления шара на дно сосуда в двух случаях: 1) сосуд неподвижен; 2) сосуд движется с постоянным горизонтальным ускорением* a.

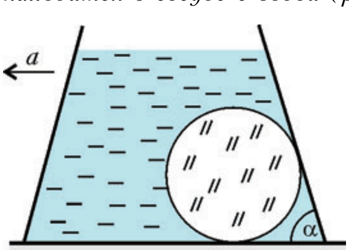


Рис. 6

Сначала рассмотрим движущийся по горизонтали с постоянным ускорением a сосуд с водой. Введем систему координат XY, связанную с сосудом, как это изображено на рисунке 7. Наша задача – найти уравнение свободной поверхности жидкости $y = f(x)$ в сосуде, который движется с горизонтальным ускорением a. Для этого выделим маленький элемент жидкости на оси X, длина которого dx, а площадь поперечного сечения равна единице. С левого торца этого элемента давление равно

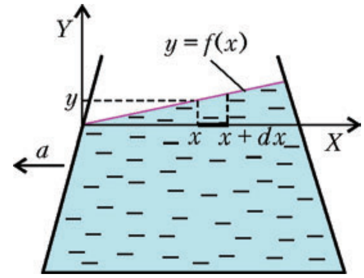


Рис. 7

$$p(x) = p_{\text{атм}} + \rho_0 g y ,$$

а с правого торца оно равно

$$p(x + dx) = p_{\text{атм}} + \rho_0 g (y + dy) ,$$

где y – высота столба жидкости в точке x, а $y + dy$ – аналогичная высота в точке $x + dx$. Так как наш элемент жидкости движется с ускорением a, его уравнение движения имеет вид

$$\rho_0\,dx\,a = \rho_0 g (y + dy) - \rho_0\,g y .$$

Отсюда получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{g} ,$$

или в интегральном виде –

$$y = \frac{a}{g} x + \text{const} .$$

Поскольку при $x = 0$ $y = 0$, константа тоже равна нулю, а уравнение свободной поверхности жидкости выглядит так:

$$y = \frac{a}{g} x .$$

Линии, параллельные свободной поверхности, внутри жидкости являются линиями постоянного давления. Таким образом, жидкость, движущаяся с горизонтальным ускорением a, эквивалентна неподвижной жидкости, находящейся в новом поле тяжести с эффективным «ускорением свободного падения», равным $g_э = \sqrt{a^2 + g^2}$ и направленным под углом $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{a}{g}$ к вертикали (рис.8). Вертикальная составляющая этого эффективного ускорения равна обычному ускорению свободного падения g, а горизонтальная составляющая численно равна ускорению сосуда и направлена в противоположную сторону.

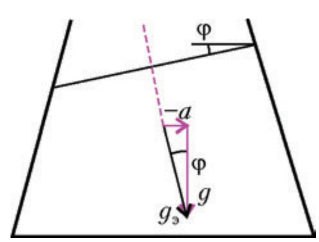


Рис. 8

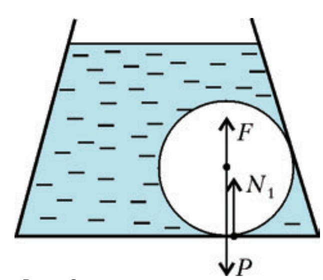


Рис. 9

В том случае, когда сосуд неподвижен ($a = 0$), эффективное ускорение равно g и направлено по вертикали. Силы, действующие на стеклянный шар в этом случае, показаны на рисунке 9. Здесь $P = \rho V g$ – вес (точнее – сила тяжести) шара, $F = \rho_0 V g$ – выталкивающая сила, а N_1 – сила реакции дна сосуда на шар. Из условия равновесия шара найдем, что

$$N_1 = (\rho - \rho_0) V g .$$

Очевидно, что сила давления шара на дно численно равна силе реакции дна и направлена в противоположную сторону.

В случае движущейся с горизонтальным ускорением a жидкости или неподвижной жидкости, но находящейся в поле с новым «ускорением свободного падения» $g_э$, на шар будут действовать следующие силы (рис.10): вертикальная составляющая нового веса шара $P_1 = \rho V g$, горизонтальная составляющая этого веса $P_2 = \rho V a$, вертикальная составляющая выталкивающей силы $F_1 = \rho_0 V g$, ее горизонтальная составляющая $F_2 = \rho_0 V a$, реакция опоры T со стороны боковой стенки и, наконец, сила N_2 – сила реакции на шар со стороны дна сосуда. Запишем условие равновесия шара, т.е. равенство нулю всех сил, действующих на шар по вертикали:

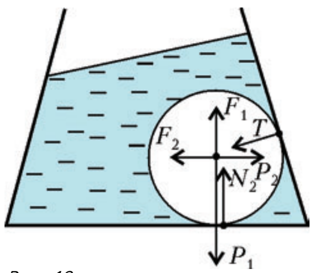


Рис. 10

$$F_1 + N_2 - P_1 - T\cos\alpha = 0$$

и по горизонтали:

$$F_2 + T\sin\alpha - P_2 = 0 .$$

Исключая из этих уравнений T, найдем искомую силу N_2:

$$N_2 = P_1 - F_1 + (P_2 - F_2)\operatorname{ctg}\alpha = (\rho - \rho_0) V (g + a\operatorname{ctg}\alpha) .$$

Разумеется, и в этом случае сила давления шара на дно сосуда численно равна силе реакции дна, но направлена в противоположную сторону.

Упражнения

1. В цилиндрическом сосуде с водой плавает деревянная дощечка. Если на нее сверху положить стеклянную пластинку, то дощечка с пластинкой останутся на плаву, а уровень воды в сосуде повысится на Δh_1. На сколько изменится уровень воды в сосуде с плавающей дощечкой, если ту же стеклянную пластинку бросить на дно сосуда? Плотность стекла $\rho_{ст}$, плотность воды $\rho_в$.

2. U-образная трубка состоит из трех одинаковых колен, расположена вертикально и заполнена жидкостью (см. рис.1). Один конец трубки соединен с баллоном, заполненным водородом, другой конец открыт в атмосферу. Водород в баллоне медленно нагревают, и он постепенно вытесняет жидкость из трубки. К моменту, когда из трубки вылилось $2/3$ всей массы жидкости, водород получил количество теплоты $Q = 30$ Дж. Найдите объем баллона. Известно, что объем всей трубки равен объему баллона; атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па; давление, создаваемое столбом жидкости в вертикальном колене трубки, равно $p_0/9$.

3. «Тройник» из трех вертикальных открытых в атмосферу трубок полностью заполнен водой (рис.11). После того, как тройник начали двигать в горизонтальном направлении в плоскости рисунка с некоторым ускорением, из него вылилось $9/32$ всей массы воды. Чему равно ускорение тройника? Внутренние сечения трубок одинаковы, длина каждой трубки L.

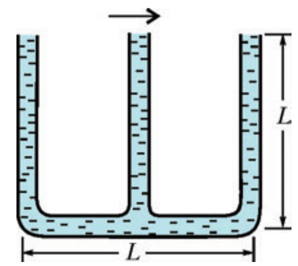


Рис. 11

4. Тонкая, запаянная с одного конца и изогнутая под прямым углом трубка заполнена жидкостью и закреплена на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси (рис.12). Открытое колено трубки вертикально. Геометрические размеры установки указаны на рисунке; атмосферное давление p_0; плотность жидкости ρ. Найдите давление жидкости у запаянного конца трубки.

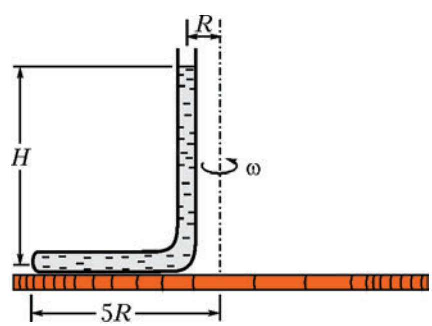


Рис. 12

ИНФОРМАЦИЯ

В 2005 году в издательстве «КолосС» вышла книга «Механика. Задачи и решения», подготовленная коллективом авторов – преподавателей кафедры общей и экспериментальной физики Московского педагогического государственного университета А.Б.Казанцевой, М.С.Каменецкой, В.Н.Александровым, Е.А.Коротаевой, И.А.Васильевой и А.Н.Елантьевым.

Решение задач – неотъемлемая часть полноценного изучения физики. Это эффективное средство усвоения физических понятий и законов. Задачи прививают навыки пользования этими законами, помогают понять явления, происходящие в реальном мире, развивают культуру мышления, формируют физическое мировоззрение и целостную физическую картину мира.

Новое учебное пособие «Механика. Задачи и решения» содержит около 700 надлежащим образом подобранных вопросов и задач, охватывающих все разделы механики. Уровень сложности включенных в него задач различен и дает возможность выбора в зависимости от этапа изучения темы и уровня подготовленности учащихся. Условные обозначения уровня сложности (С1, С2 и С3) облегчают ориентировку читателя при самостоятельной работе.

Каждый раздел книги содержит теоретическое введение, в котором имеются необходимые для решения задач законы и формулы, подробный методический разбор решений основных типов задач (количество разобранных задач составляет примерно четвертую часть от их общего числа), к некоторым задачам даются указания к решению, к остальным приводятся ответы. Отличительной особенностью данного пособия является детальное структурирование учебного материала и тщательно продуманная последовательность предлагаемых задач и решений.

Книга рекомендуется в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности физика, но может быть полезной и преподавателям, и школьникам старших классов, интересующимся физикой и готовящимся к поступлению в вуз.

Материалы вступительных экзаменов 2005 года

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(олимпиада «Ломоносов-2005»)[1]

1. Вычислите

$$\frac{(x-y)\left(x^4-y^4\right)}{x^2-y^2}-\frac{2xy\left(x^3-y^3\right)}{x^2+xy+y^2}$$

при

$$x=1,\underbrace{2\ldots22}_{46},\quad y=-2,\underbrace{7\ldots7}_{45}8\,.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{3\cdot2^{1-x}+1}{2^x-1}\ge\frac{1}{1-2^{-x}}\,.$$

3. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $BC=5$, если расстояния от вершин A и D до прямой BC равны 3 и 7 соответственно.

4. Решите уравнение

$$\log_4\left(4\sin^2 2x\right)=2-\log_2\left(-2\operatorname{tg}x\right).$$

5. На окружности взята точка A, на ее диаметре BC – точки D и E, а на его продолжении за точку B – точка F. Найдите BC, если $\angle BAD=\angle ACD$, $\angle BAF=\angle CAE$, $BD=2$, $BE=5$ и $BF=4$.

6. Решите неравенство

$$5|x|\le x\left(3x+2-2\sqrt{8-2x-x^2}\right).$$

7. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 12 и 13, а ее высота образует с высотами боковых граней (опущенными из той же вершины) одинаковые углы, не меньшие 30°. Какой наибольший объем может иметь такая пирамида?

8. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$4x-\big|3x-|x+a|\big|=9|x-1|$$

имеет хотя бы один корень.

9. Группа отдыхающих в течение 2 ч 40 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды) попеременно то по течению, то против: в каждую сторону в общей сложности не менее чем по 1 ч. В итоге лодка прошла путь в 40 км (относительно берега) и, отчалив от пристани A, причалила к пристани B на расстоянии 10 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость ее течения?

10. При каждом натуральном n тело Φ_n в координатном пространстве задано неравенством

$$3|x|^n+|8y|^n+|z|^n<1\,,$$

а тело Φ – объединение всех тел Φ_n. Найдите объем Φ.

[1] *Эта олимпиада рассматривалась в качестве 3-го тура Всероссийской олимпиады школьников, и ее победители зачислялись на различные факультеты МГУ.*

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Согласно расписанию, автобус курсирует по маршруту из пункта A в пункт B и обратно с постоянной скоростью и без остановок. На пути из A в B он был вынужден на некоторое время остановиться, поэтому на обратном пути увеличил скорость на 25%. Приехав в A с 10-минутным отклонением от расписания, он уменьшил свою последнюю скорость на 24% и прибыл в B вовремя. Какова была продолжительность вынужденной остановки?

2. Найдите $\log_2\frac{2x}{2^x}$ при условии

$$\left|\log_{\sqrt2}x^{x/2}-2\log_2 x\right|+\big||2-x|-|\log_2 x|\big|\le(x-2)\log_8 x^3\,.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\cos\frac{2x-7}{4}-\cos\frac{x-5}{4}}\ge0\,.$$

4. На основании BC трапеции $ABCD$ взята точка E, лежащая на одной окружности с точками A, C и D. Другая окружность, проходящая через точки A, B и C, касается прямой CD. Найдите BC, если $AB=12$ и $BE:EC=4:5$. Найдите все возможные значения отношения радиуса первой окружности к радиусу второй при данных условиях.

5. Пусть X – сумма корней уравнения

$$a\cos x=\sqrt2+2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

на промежутке $[0;2\pi)$, а Y – сумма корней уравнения

$$a\cos2y-2\sin2y=a-3\sin y$$

на том же промежутке. Найдите все значения a, при которых

$$\operatorname{ctg}\frac{X-Y}{2}=\sqrt3\,.$$

6. Найдите объем тетраэдра $ABCD$ с ребрами $AB=3$, $AC=5$ и $BD=7$, если расстояние между серединами M и N его ребер AB и CD равно 2, а прямая AB образует равные углы с прямыми AC, BD и MN.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада[2], апрель 2005)

1. Решите неравенство

$$6\log_{2x}x+2\log_{4\sqrt x}(2x)\ge1\,.$$

[2] *Результаты этой олимпиады засчитывались при приеме на контрактное обучение.*

2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases}\sin 2(x+y)=1,\\ xy=9.\end{cases}$$

3. Найдите все пары целых x и y, удовлетворяющие равенству

$$4x^2-2xy+2y^2+y-2x-1=0.$$

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке L. Площади треугольников AML, CNL и ALC равны 1, 6 и 4 соответственно. Найдите площадь треугольника MBN.

5. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Известно, что длина перпендикуляра, опущенного из основания H высоты пирамиды SH на грань SDC, равна $\sqrt{6}$, а угол наклона бокового ребра SB к плоскости основания равен $\frac{\pi}{3}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$.

6. Решите уравнение

$$12\cos 2x+8|\sin x|\sqrt{3+|\sin x|-3\cos 2x}=11.$$

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$\log_2\left(\frac{x^2+|x-3|+3}{x+1}\right)^2-|\log_2 x-2|>\log_2 x+2.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\operatorname{ctg} x+1}=-\sqrt{15}\sin x.$$

3. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, являются арифметическими прогрессиями, $a_{11}=32$, $b_{21}=43$. Последовательность $\{c_n\}$ определяется равенствами $c_n=(-1)^n a_n+(-1)^n b_n$. Сумма первых сорока членов последовательности $\{c_n\}$ равна 100, а сумма первых ее двадцати трех членов равна -60. Найдите b_{40} и сумму первых ста членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$.

4. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle AMD=\angle ADB$ и $\angle ACM=\angle ABC$. Утроенный квадрат отношения расстояния от точки A до прямой CD к расстоянию от точки C до прямой AD равен 2, $CD=20$. Найдите радиус вписанной в треугольник ACD окружности.

5. Найдите все значения параметра a, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$, при которых уравнение

$$\sin^5(3x+a)=\cos(\pi\cdot[x])$$

имеет на отрезке $[1;\pi]$ нечетное число решений. (Здесь $[x]$ – целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $[x]\le x$.)

6. На гранях ABC, ABD, ACD и BCD тетраэдра $ABCD$ выбраны соответственно точки K, L, M и N так, что $KL\parallel CD$, $KM\parallel BD$, $KN\parallel AD$. Отношение объема тетраэдра $ABCD$ к объему тетраэдра $KLMN$ равно 64. Известно, что

$$2(AD\cdot KM+BD\cdot KN)=AD\cdot BD.$$

Найдите отношение площадей треугольников ABD и KMN.

Вариант 5

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$2\cos 2x\cos 7x-\cos 4x=1.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{5x-x^2+6}<\sqrt{6}-x.$$

3. Решите уравнение

$$5^{x\sqrt{12}}-5\sqrt{3}\cdot 15^{x\sqrt{3}}+4\cdot 3^{1+x\sqrt{12}}=0.$$

4. На окружности взяты последовательно точки P, Q, R и S, $PQ=PS$. Отрезки PR и QS пересекаются в точке T, $RQ=q$, $RS=s$, $RT=t$. Найдите PT.

5. Решите систему

$$\begin{cases}x+4\sqrt{x-y}=y+12,\\ |2(x+1)+y|+2|2x+(y-1)|=3.\end{cases}$$

6. Вершина M прямого угла ΔLMN лежит внутри окружности с центром O и радиусом 8, проходящей через концы гипотенузы LN, MH – высота ΔLMN. На прямой LN взята точка K так, что $KH=OH$. Найдите MK.

7. Для каждого допустимого значения a решите неравенство

$$\log_{ax}\left(\frac{a}{2}\right)\log_{a^2-2}(a-1)<0.$$

8. В правильной треугольной пирамиде $SKLM$ с вершиной S точка N – середина отрезка KL, $SN=\sqrt{17}$. Сфера, проходящая через точки L, M и N, касается ребра SK в точке P такой, что $KP:PS=1:2$. Найдите высоту SH пирамиды $SKLM$.

Вариант 6

(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$|2x+1|=|x+2|.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{3}\cdot 4^x\le\sqrt{2}\cdot 9^x.$$

3. Решите тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg} 4x+\cos 5x.$$

4. Найдите число n сторон выпуклого n-угольника, если каждый его внутренний угол не менее 143° и не более 146°.

5. Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\sqrt{2x-y-3}+\sqrt{2y-x+3}=2\sqrt{3-x-y}.$$

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$|x|+\left|\frac{x+1}{3x-1}\right|=a$$

имеет ровно три решения?

Вариант 7

(биологический факультет, факультет биоинженерии и биоинформатики, факультет фундаментальной медицины, факультет наук о материалах)

1. Решите уравнение

$$x^2+2|x|-3=0.$$

2. Решите уравнение

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}.$$

3. Диагонали трапеции равны 12 см и 6 см, а сумма длин оснований равна 14 см. Найдите площадь трапеции.

4. Решите неравенство

$$\sqrt{x-1} < 3 - x.$$

5. На беговой дорожке стадиона длиной 400 м одновременно со старта в одном направлении начинают забег два спортсмена на дистанцию 10 км. Каждый из них бежит со своей постоянной скоростью. Первый спортсмен приходит на финиш на 16 мин 40 с раньше второго и через 43 мин 20 с после того, как он второй раз на дистанции (не считая момента старта) обогнал второго спортсмена. Известно, что скорость первого спортсмена больше 100 м/мин. Сколько всего раз первый спортсмен обгонял второго на дистанции после старта?

6. Решите систему

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2-2x-22y+122} = \\ \qquad = 2\sqrt{37} - \sqrt{x^2+y^2+2x+2y+2}, \\ \log_{x+1} 4 + \log_y 4 = 0.\end{cases}$$

7. Задана функция f, причем $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для всех рациональных чисел x, y. Известно, что $f(10) = -\pi$. Найдите $f\left(-\frac{2}{7}\right)$.

Вариант 8

(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$(6x-15)^7 = (x-1)^{14}.$$

2. Решите уравнение

$$\sin\left(\sqrt{3}\arcsin x\right) = 1.$$

3. Решите неравенство

$$|x-1| \le |x|.$$

4. Грузовики трех типов A, B и C возили кирпич. В первый день работали по пять грузовиков каждого типа и выполнили весь объем работы за 3 часа 12 минут. Во второй день за 6 часов 40 минут этот же объем работы выполнили по два грузовика типов A и B и четыре грузовика типа C. За сколько часов был бы выполнен весь объем работы, если бы кирпич возили два грузовика типа A и два грузовика типа B?

5. Для каких значений параметра p отношение суммы коэффициентов многочлена $\left(px^2-7\right)^{18}$ к его свободному члену минимально?

6. На плоскости даны точки с координатами: $A(1;2)$, $B(2;1)$, $C(3;-3)$, $D(0;0)$. Они являются вершинами выпуклого четырехугольника $ABCD$. В каком отношении точка пересечения диагоналей S делит диагональ AC?

Вариант 9

(географический факультет)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}12\sin^2 x - \sin^2 y = 3, \\ 6\sin x + \cos y = -2.\end{cases}$$

2. Произведение длины средней линии трапеции и длины отрезка, соединяющего середины ее диагоналей, равно 25. Найдите площадь трапеции, если ее высота втрое больше разности оснований.

3. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{1-x}}(1+5x) \ge -2.$$

4. Найдите периметр фигуры, точки которой на координатной плоскости $(x;y)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases}y > \left||x-2|-1\right|, \\ x^2+y^2 < 4x+2y-3.\end{cases}$$

5. В цехе имелось N одинаковых станков, которые, работая вместе, вытачивали в день 5850 готовых деталей. После модернизации число производимых в день каждым станком готовых деталей возросло на 20%. Это позволило по крайней мере без сокращения общего объема продукции цеха уменьшить число станков максимум на 4. Найдите N.

6. Угол между прямыми, каждая из которых содержит по одной образующей конуса, равен $45°$. Прямая, перпендикулярная обеим этим образующим, пересекает плоскость основания конуса под углом $\frac{\pi}{8}$. Найдите угол боковой развертки конуса, если известно, что он больше $270°$.

Вариант 10

(геологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\left(|x|-1\right)\left(2x^2+x-1\right) \le 0.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{-x^2-x+6} - x \ge 2.$$

3. В треугольнике ABC угол C прямой, тангенс угла A равен $\frac{1}{4}$, медиана BD равна $\sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника ABD и радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABD.

4. Найдите наименьший корень уравнения

$$\sqrt{\cos 2x + x - 11} = \sqrt{x - 15 - 5\cos x}.$$

5. В арифметической прогрессии квадрат суммы третьего и четвертого ее членов равен сумме второго и пятого ее членов. Чему равна сумма первых шести членов этой прогрессии?

6. Решите неравенство

$$\log_x\left(x+\frac{1}{3}\right) \le \log_{\sqrt{2x+3}}\left(x+\frac{1}{3}\right).$$

7. Найдите все значения, которые может принимать сумма $x + a$ при условии

$$|2x+4-2a| + |x-2+a| \le 3.$$

8. В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы ABC и SAB прямые, двугранный угол между плоскостями ABS и ABC равен $\operatorname{arcctg}\frac{2\sqrt{10}}{3}$. Найдите длину высоты пирамиды, опущенной из вершины B на плоскость ASC, если $BC = 7$, $AB = 4$.

Вариант 11

(филологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\left|x^2 - 3|x| + 1\right| = 1.$$

2. На вступительном экзамене по математике 15% поступающих не решили ни одной задачи, 144 человека решили задачи с ошибками, а число верно решивших все задачи относится к числу не решивших вовсе как 5 : 3. Сколько человек экзаменовалось по математике в этот день?

3. Решите неравенство

$$\log_2(x+1) > \log_{x+1} 16 .$$

4. Найдите площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения

$$2x^2 - 6x + 1 = 0 .$$

5. Решите уравнение

$$2 + \sin t = 3\operatorname{tg}\frac{t}{2} .$$

6. Биссектриса CD угла ACB при основании равнобедренного треугольника ABC $(AB = AC)$ делит сторону AB так, что $AD = BC$. Найдите длину биссектрисы CD и площадь треугольника ABC, если $BC = 2$.

7. При каких целых a неравенство

$$2\log_{\frac{1}{2}} a - 3 + 2x\log_{\frac{1}{2}} a - x^2 < 0$$

верно для любого значения x?

Вариант 12

(экономический факультет, отделение экономики)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{9}} \operatorname{ctg}\frac{2x}{9}} + \sqrt{\log_{\frac{1}{9}} \sin 4x} = 0 .$$

2. Найдите сумму всех целых значений, которые принимает функция

$$y = \frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{x^2}{20} + 6$$

при $x \in [2;12]$.

3. Вновь созданное акционерное общество продало населению 1000 своих акций, установив скидку 10% на каждую пятую продаваемую акцию и 25% на каждую тринадцатую продаваемую акцию. В случае если на одну акцию выпадают обе скидки, то применяется большая из них. Определите сумму, вырученную от продажи всех акций, если цена акции составляет 1000 рублей.

4. Решите неравенство

$$\log_{2+\sqrt{5}}(4 - x) - \log_{9-4\sqrt{5}}\left(4x^2 + 28x + 49\right) + \log_{\sqrt{5}-2}\left(x^2 + x - 6\right) \le 0 .$$

5. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон в точках K, N и M. Известно, что в треугольнике KNM угол M равен 75°, произведение всех сторон равно $9 + 6\sqrt{3}$, а вершина K делит отрезок AC пополам. Найдите длины сторон треугольника ABC.

6. Найдите все рациональные решения уравнения

$$\sqrt{y(x+1)^2 - x^2 + x + 1} + \log^2_{\frac{|y+2|}{21}} \cos^2 \pi y = 0 .$$

7. Фигура F задается на координатной плоскости неравенством

$$\frac{3\pi^2 - 2\arcsin\left(\frac{y - x + 9}{13}\right)\cdot\arccos\left(\frac{10 + 2x + 2y}{18}\right)}{|x - 4|\cdot\left(\left|\sqrt{9\sqrt{128} - 97} + x\right| + |y + 5|\right)} \ge 0 .$$

В каких пределах изменяются площади всевозможных кругов, целиком принадлежащих F?

Вариант 13

(Московская школа экономики)

1. Решите уравнение

$$|2x - 4| + 4 = 2x .$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 + 2x} - x > 1 .$$

3. Решите уравнение

$$1 + \log_4(x + 2)^2 = \log_2(2x + 8) .$$

4. Найдите все решения уравнения

$$6\cos\left(\frac{15\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos x = 3 ,$$

принадлежащие отрезку $[-2; 10,99]$.

5. Найдите четыре числа, которые образуют арифметическую прогрессию, если сумма крайних равна 18 и второе число меньше третьего на 20%.

6. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 < 5, \\ 4y \le x + 11. \end{cases}$$

7. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 21$, $BM = 9$, а угол ABC равен 60°.

8. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a - 1)\cdot 4^x + (2a - 3)\cdot 6^x = (3a - 4)\cdot 9^x$$

имеет единственное решение?

Вариант 14

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$|x - 2| + 2|x + 1| = 9 .$$

2. Решите неравенство

$$\frac{4^x + 5}{2^x - 11} \ge -1 .$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{2\cos^2 x - \sqrt{3}} + \sqrt{2}\sin x = 0 .$$

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали BD и AC равны стороне AB. Найдите величину угла BCD и сторону AB, если угол CDA прямой, $BC = 4$, $AD = 5$.

5. Зенон не раз наблюдал забавную игру Ахилла с черепахой: Ахилл и черепаха приближались друг к другу вдоль тропинки, стартуя с разных концов тропинки. Двигались они только навстречу друг другу, причем, когда черепаха стояла, Ахилл шел навстречу ей, а когда черепаха ползла навстречу Ахиллу, Ахилл стоял в течение всего времени ее движения. Продвигались они по тропинке друг к другу каждый со своей постоянной скоростью, одной и той же в разных играх, причем скорость идущего Ахилла была в 50 раз больше скорости ползущей черепахи. Игра заканчивалась, когда Ахилл и черепаха сходились в одной точке тропинки. В первой игре, начав сближаться по первой тропинке, они сошлись не ранее чем через 15 минут. Во второй игре, сближаясь по второй тропинке, они сошлись не позже чем через полторы минуты. В третьей игре они сошлись по третьей тропинке за 11 минут, причем в ходе этой игры Ахилл двигался в общей сложности в течение 1 минуты, а черепаха – в течение 10 минут. Известно, что сумма длин первой и третьей тропинок равна длине второй тропинки. Каково отношение расстояния, пройденного Ахиллом навстречу черепахе за время всех трех игр, к расстоянию, на которое продвинулась черепаха навстречу Ахиллу за время всех трех игр?

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция

$$f(x) = \frac{4\sin x + a}{4a - 2\sin x}$$

принимает все значения из отрезка $[0;1]$.

Вариант 15

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} \le 1 .$$

2. Решите уравнение

$$\cos 4x = 4\cos x \cos 2x - 1 .$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 + 4x + 3} = \sqrt{(x+2)^3} .$$

4. Магазин закупил некоторое количество товара и начал его реализацию по цене на 25% выше цены, назначенной производителем, чтобы покрыть затраты, связанные с его транспортировкой, и другие дополнительные расходы. Оставшуюся после реализации часть товара магазин уценил на 16% с тем, чтобы покрыть только затраты на закупку этой части товара у производителя и его транспортировку. Сколько процентов от цены, назначенной производителем, составляла стоимость транспортировки товара?

5. Решите неравенство

$$\log_{4|x|+1}(6x+2) - \log_{6x+2}(4|x|+1) < 0 .$$

6. В выпуклом четырехугольнике с вершинами в точках A, B, C, D заданы длины отрезков $AD = 2$, $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 2(\sqrt{3} - 1)$. Величины углов DAB и ABC равны $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$ соответственно. Вычислите все углы четырехугольника.

7. Фигура на плоскости $(x; y)$ состоит из всех точек, через которые не проходит ни одна из кривых, задаваемых соотношением

$$\left(p^4 + 4p^2 + 16\right)^2 + \left(x^2 - y^2\right)^2 =$$
$$= 16\left(p^3 + 4p\right)xy + 2\left(p^4 + 12p^2 + 16\right)\left(x^2 + y^2\right)$$

при различных действительных значениях p. Найдите длину линии, ограничивающей эту фигуру.

Вариант 16

(факультет государственного управления)

1. Можно ли разделить сумму в 196 рублей на 16 разных частей так, чтобы ближайшие по величине части отличались на 50 копеек?

2. Решите неравенство

$$1 < \frac{\sqrt{2}(x-4)}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}} .$$

3. В четырехугольнике $ABCD$ найдите точку E такую, чтобы отношение площадей треугольников EAB и ECD было равно $1/2$, а треугольников EAD и EBC – $3/4$, если известны координаты всех его вершин: $A(-2;-4)$, $B(-2;3)$, $C(4;6)$, $D(4;-1)$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x - \sin 1 = 0, \\ \cos x - \cos 1 = 0. \end{cases}$$

5. Тёма сделал несколько мелких покупок в супермаркете, имея при себе сто рублей. Давая сдачу с этой суммы, кассир ошиблась, перепутав местами цифры, и выплатила рублями то, что должна была вернуть копейками, и, наоборот, копейками то, что полагалось вернуть рублями. Купив в аптеке набор пипеток за 1 руб. 40 коп., Тёма обнаружил ошибку кассира и, пересчитав деньги, нашел, что оставшаяся у него сумма втрое превышает ту, которую ему должны были вернуть в супермаркете. Какова стоимость всех покупок Тёмы?

6. Найдите все значения a, для которых при любом положительном b уравнение

$$a\log_{\frac{1}{x}-2} 4 = \log_2\left(\frac{1}{x} - 2\right) - b$$

имеет хотя бы одно решение, меньшее $\frac{1}{3}$.

7. Для того чтобы сделать полный круг по кольцевому маршруту, автомобилю требуется 150 л бензина. На маршруте расположены пять промежуточных пунктов, в каждом из которых имеется запас в 30 л бензина. Покажите, что найдется пункт, в котором автомашина с пустыми баками и достаточным запасом пустых канистр может заправиться, стартовать и, пополняя запас бензина в четырех встречных пунктах, сделать полный круг.

Вариант 17

(социологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - 4x + 9} = 3 .$$

2. Решите уравнение

$$3 \cdot 81^x - 10 \cdot 9^x + 3 = 0 .$$

3. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия содержит член $b_n = \frac{1}{6}$. Отношение суммы членов прогрессии, стоящих перед b_n, к сумме членов, стоящих после b_n, равно 6. Найдите n, если сумма всей прогрессии равна $\frac{3}{4}$.

4. Высота треугольника, равная 2, делит угол треугольника в отношении $2:1$ и делит основание треугольника на части, меньшая из которых равна 1. Определите площадь треугольника.

5. Решите неравенство

$$\log_{0,5}\left(\sqrt{5-x} - x + 1\right) > -3 .$$

6. Группа школьников решила купить музыкальный центр, при этом каждый внес одну и ту же сумму. Однако в последний момент двое отказались, и каждому из оставшихся пришлось добавить по 100 рублей. Сколько школьников первоначально участвовало в покупке, и какова цена музыкального центра, если известно, что она заключена в пределах от 17000 до 19500 рублей?

Вариант 18

(факультет глобальных процессов)

1. В турнире борцов участвуют 127 спортсменов. Борец выбывает из соревнований сразу после поражения в поединке. Сколько поединков требуется провести, чтобы выявить победителя турнира?

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{2x^2+3x} \le \frac{1}{3x-2x^2}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{0,5-\left|2x^2-5x+2\right|}\left(0,5+\left|8x^2-2x-1\right|\right) \ge 1.$$

4. Найдите площадь трапеции $ABCD$ $(BC \parallel AD)$, вписанной в окружность с центром в точке O, если ее высота равна 2, а угол COD равен 60°.

5. Выясните, верно ли следующее утверждение: множество значений функции

$$y = \cos 2x - 3\sin x$$

принадлежит отрезку $\left[-4;\sqrt{5}\right]$. Ответ надо обосновать.

6. Общий процент прибыли за весь товар, проданный в трех магазинах, расположенных в разных районах города, составил 26,8%. Через первый магазин было продано 60% всего товара, через второй – 40% оставшейся части товара. С какой прибылью продан товар через третий магазин, если прибыль от продажи в первом составила 30%, а во втором – 25%?

7. Верхняя грань $ABCD$ куба $ABCDA'B'C'D'$ ($AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ – боковые ребра) является одновременно основанием правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, у которой высота вдвое меньше длины ребра куба. Найдите угол между прямыми $A'B$ и AS.

8. Переменные x, y связаны условием

$$x^2+y^2-6x+4y+10=0.$$

Найдите все значения параметра a, при которых разность между наибольшим и наименьшим значениями выражения $2ax-3y-10$ больше 12.

ФИЗИКА

Физический факультет

Избранные задачи олимпиады «Покори Воробьевы горы»

1. В высокий цилиндрический сосуд с внутренним диаметром D = 7 см налито m = 50 г воды. В сосуд медленно опускают подвешенный на нити стержень массой M = 5 кг, имеющий форму прямого кругового цилиндра длиной L = = 218,3 см. Плотность материала стержня $\rho = 600$ кг/м^3. Оси сосуда и стержня вертикальны и совпадают. Найдите изменение силы натяжения подвеса, когда расстояние между нижним основанием стержня и дном сосуда станет равным h = 3 мм, по сравнению со случаем, когда стержень еще не касался воды.

2. К грузу, надетому на гладкий горизонтальный стержень, с разных сторон прикреплены две одинаковые легкие пружины жесткостью k. Другие концы пружин прикреплены к стенкам так, что оси пружин совпадают с осью стержня и пружины не деформированы. При этом длина каждой пружины равна L. В момент времени t = 0 правая стенка начинает двигаться влево с постоянной скоростью v, скользя по стержню. Найдите массу груза, если за время перемещения стенки на расстояние L скорость груза монотонно росла и стала равной v.

3. Телу, лежащему на плоскости, наклоненной под углом α к горизонту, сообщают начальную скорость v_0, направленную горизонтально вдоль наклонной плоскости. Коэффициент трения тела о плоскость $\mu > \operatorname{tg}\alpha$. Через какое время после начала движения тело остановится, если оно не покидает плоскость?

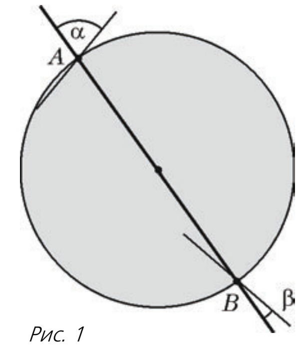


Рис. 1

4. По гладкой горизонтальной плоскости скользит диск радиусом R, вырезанный из тонкого однородного листа металла (рис.1). В момент времени t = 0 величина скорости точки A, расположенной на краю диска, оказалась равной v_A. При этом скорость диаметрально противоположной крайней точки B диска была направлена вдоль прямой, образующей с диаметром AB угол $\beta < 0,5\pi$, а скорость точки A совпадала с прямой, образующей с этим диаметром угол $\alpha < 0,5\pi$. Найдите величину перемещения Δr центра диска к моменту $t = \tau$. Окончательный расчет проведите для $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 30^\circ$.

5. Две большие одинаковые металлические пластины, находящиеся в вакууме, могут свободно двигаться вдоль перпендикулярной их плоскостям горизонтальной прямой AB, проходящей через середины пластин. Середины пластин скреплены между собой легкой недеформированной проводящей пружиной жесткостью k. На прямой AB на расстоянии L от наружных поверхностей пластин, удерживая их, закрепляют два маленьких шарика, имеющих заряды $+q$ и $-q$. При каком значении q пластины после отпускания будут совершать колебания с максимальным отклонением от исходного положения, не касаясь шариков?

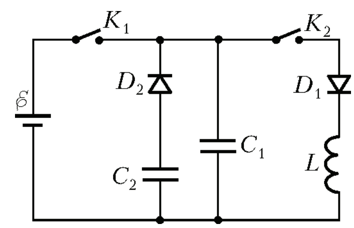


Рис. 2

6. В схеме, изображенной на рисунке 2, ключи K_1 и K_2 вначале разомкнуты, а конденсаторы разряжены. Сначала замыкают ключ K_1, затем его размыкают и замыкают ключ K_2. Зная емкости конденсаторов C_1 и C_2, найдите отношение установившегося напряжения на диоде D_2 к величине ЭДС батареи $\mathscr{E}$. Диоды считайте идеальными.

7. Через некоторое время τ после замыкания ключа K в схеме, показанной на рисунке 3, напряжение на конденсаторе емкостью C_2 перестало изменяться, а его заряд стал равным q. Параметры элементов указаны на рисунке. Зная, что до замыкания ключа все конденсаторы были разряжены, найдите количество теплоты Q, которое может выделиться на резисторе R_1 после этого момента. Диод считать идеальным, индуктивностью элементов схемы и внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

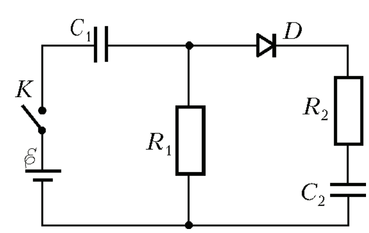


Рис. 3

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Задачи устного экзамена

1. Беговые дорожки легкоатлетического стадиона состоят из двух прямолинейных участков, соединенных двумя полуокружностями. Ширина дорожки $d = 1$ м. Линия старта проведена перпендикулярно прямолинейному участку дорожек и совпадает с линией финиша. Два бегуна, находящихся на первой (внутренней) и второй (внешней) дорожках, одновременно принимают старт и пробегают до финиша один круг. Они разгоняются равноускоренно, пока не наберут максимальную скоростью $v_0 = 8$ м/с, одинаковую для обоих бегунов, с которой и пробегают оставшуюся часть дистанции. На сколько отличаются времена разгона бегунов, если, двигаясь каждый по середине своей дорожки, они финишируют одновременно?

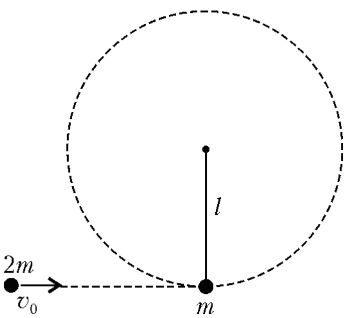


Рис. 4

2. Шарик массой m подвешен на невесомой нерастяжимой нити длиной $l = 1$ м (рис.4). В него ударяется шарик массой $2m$, летящий в плоскости рисунка со скоростью v_0 так, что вектор скорости направлен горизонтально вдоль линии, соединяющей центры шариков. Какой должна быть скорость v_0, чтобы после удара шарик массой m совершил полный оборот по окружности в вертикальной плоскости? Удар считать абсолютно упругим, силы трения не учитывать. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

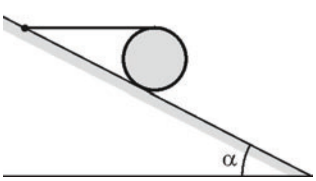


Рис. 5

3. Сплошной однородной цилиндр массой m располагается на шероховатой наклонной плоскости, образующей с горизонталью угол α (рис.5). На цилиндр намотана нить, которая закреплена на наклонной плоскости так, что ее отрезок между цилиндром и точкой закрепления горизонтален. Найдите силу F, с которой цилиндр действует на плоскость, если известно, что он находится в равновесии. Ускорение свободного падения равно g.

4. Тонкую деревянную палочку подвесили за один из концов на нити, а другой конец опустили в воду (рис.6). При этом палочка оказалась наклоненной к горизонтали на угол $\alpha = 30°$, а длину ее части, погруженной в воду, составила половину длины палочки. Какую работу A нужно совершить, чтобы вытащить за нить палочку из воды? Длина палочки L, площадь сечения S, плотность воды $\rho_в$, ускорение свободного падения g заданы.

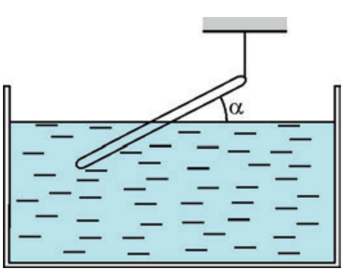


Рис. 6

5. Два одинаковых шарика массой m каждый, связанные пружиной жесткостью k и длиной l, лежат неподвижно на гладком горизонтальном столе (рис. 7). Третий такой же шарик движется со скоростью v_0 по линии, соединяющей центры шариков, связанных пружиной, и совершает упругое соударение с одним из них. Определите максимальное и минимальное расстояния между шариками, связанными пружиной, при их дальнейшем движении. Принять, что $v_0 < l\sqrt{2k/m}$. Массой пружины, временем соударения и трением пренебречь.

Рис. 7

6. Груз массой M подвешен на пружине. Удерживая груз в положении равновесия, на него кладут брусок массой m, а затем отпускают. С какой максимальной силой $F_{\max}$ брусок будет действовать на груз в процессе движения? Ускорение свободного падения равно g. Сопротивлением воздуха пренебречь.

7. Тонкая сферическая оболочка воздушного шара изготовлена из однородного материала, масса единицы площади которого $\sigma = 1$ кг/м^2. Шар наполнен гелием при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па. Какой минимальный радиус $r_{\min}$ должен иметь шар, чтобы он начал подниматься вверх? Температуры гелия и окружающего воздуха одинаковы и равны $t_0 = 0$ °С. Молярные массы гелия и воздуха равны $M_{He} = 4$ г/моль и $M_в = 29$ г/моль соответственно. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

8. Внутри вертикально расположенного цилиндра, воздух из которого откачан, находится тонкий массивный поршень. Под поршень ввели смесь водорода и гелия, в результате чего поршень поднялся до середины цилиндра. Поскольку материал, из которого изготовлен поршень, оказался проницаемым для гелия, поршень начал медленно опускаться. Спустя достаточно большое время поршень занял окончательное положение равновесия на высоте, составляющей 1/3 высоты цилиндра. Найдите отношение k масс водорода и гелия в смеси в первоначальный момент. Молярная масса водорода $M_1 = 2$ г/моль, молярная масса гелия $M_2 = 4$ г/моль. Температуру считать постоянной.

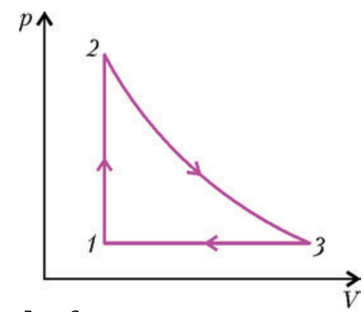


Рис. 8

9. В тепловом двигателе, рабочим телом которого является один моль идеального одноатомного газа, совершается циклический процесс, изображенный на рисунке 8, где участок *2–3* – изотермическое расширение. Найдите работу газа A на участке *2–3*, если коэффициент полезного действия двигателя $\eta = 20\%$, а разность между максимальной и минимальной температурами газа $\Delta T = 100$ К.

10. Маленький шарик, несущий заряд $+q$, закреплен на пружине жесткостью k (рис.9). На расстоянии L от этого шарика удерживают другой такой же шарик с зарядом, равным $-q$. Какую работу A нужно совершить, чтобы, медленно отодвигая второй шарик от первого, увеличить расстояние между ними в 2 раза? Действием силы тяжести пренебречь. Электрическая постоянная равна ε_0.

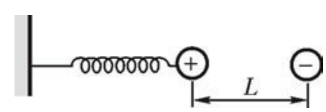


Рис. 9

11. Два одноименно заряженных металлических шарика находятся в вакууме на расстоянии, намного превышающем радиусы обоих шариков. Радиус и заряд первого шарика равны $R_1 = 4$ см и $Q_1 = 10^{-8}$ Кл соответственно. Чему равны радиус R_2 и начальный заряд Q_2 второго шарика, если известно, что после соединения шариков тонким проводом напряженность электрического поля вблизи поверхности первого шарика изменилась в $k_1 = 4$ раза, а вблизи второго – в $k_2 = 0{,}5$ раза?

12. Заряженный конденсатор емкостью C замыкают на реостат, сопротивление которого может плавно изменяться от R_0 до нуля. По какому закону нужно изменять со временем сопротивление реостата, чтобы сила тока через него оставалась постоянной вплоть до полной разрядки

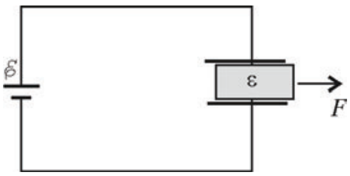


Рис. 10

конденсатора? Сопротивление реостата в начале разрядки равно R_0.

13. Плоский воздушный конденсатор емкостью C_0 с квадратными обкладками, сторона каждой из которых равна l, подключен к источнику с ЭДС $\mathscr{E}$. В конденсатор вставляют пластинку с диэлектрической проницаемостью ε, занимающую все пространство между обкладками, а затем выдвигают ее из конденсатора на небольшое расстояние, как показано на рисунке 10. Какую силу F нужно приложить к пластинке, чтобы удерживать ее в таком положении?

14. Самолет летит горизонтально, держа курс строго на север при сильном западном ветре, имеющем скорость $u = 40$ м/с. Скорость самолета относительно воздуха $v = 720$ км/ч. Чему равна разность потенциалов ΔU между концами крыльев самолета, если размах крыльев составляет $L = 50$ м, а вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна $B = 5 \cdot 10^{-5}$ Тл? Ширина концов крыльев пренебрежимо мала.

15. Металлический стержень массой m лежит на двух проводящих рейках, расположенных в горизонтальной плоскости, как показано на рисунке 11. Рейки через ключ подсоединены к пластинам конденсатора, а вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, направленной вертикально. В начальный момент заряд на конденсаторе равен q_0, ключ разомкнут, а стержень покоится. Затем ключ замыкают. Определите заряд q на конденсаторе в момент, когда скорость стержня достигнет величины v. Расстояние между рейками l. Индуктивностью цепи, а также силами трения пренебречь.

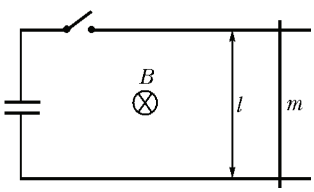


Рис. 11

16. Согласно модели Томсона, атом водорода представляет собой положительно заряженный шар, внутри которого находится отрицательный точечный заряд – электрон, причем в невозбужденном атоме электрон покоится в центре шара. Предположим, что электрон сместили от центра шара на некоторое расстояние, не превышающее радиус шара, и предоставили самому себе. Определите период T возникших при этом свободных колебаний электрона, пренебрегая потерями на излучение. Радиус шара принять равным $R = 3 \cdot 10^{-10}$ м, а его заряд, равный $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, считать равномерно распределенным по объему. Масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

17. Плоскопараллельная пластинка толщиной $d = 2$ мм изготовлена из прозрачной пластмассы с показателем преломления $n = \sqrt{29}/4 \approx 1{,}35$. Изгибая пластинку, ей придают форму, изображенную на рисунке 12, где показано поперечное сечение пластинки. Радиус кривизны изогнутого участка пластинки равен $R = 1$ см. Под каким максимальным углом $\alpha_{\max}$ может падать световой пучок на торец пластинки в плоскости рисунка, чтобы свет не выходил из пластинки через ее боковую поверхность?

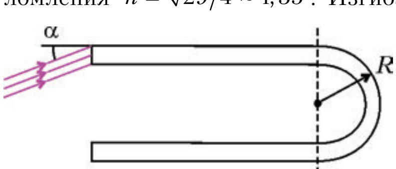


Рис. 12

18. На некотором расстоянии от стеклянного шара находится точечный источник света, дающий узкий световой пучок, ось которого проходит через центр шара. При каких значениях показателя преломления стекла n изображение источника будет находиться вне шара независимо от расстояния шара до источника?

19. Узкий световой пучок падает на тонкую собирающую линзу параллельно ее главной оптической оси и образует светлое пятно на экране, параллельном плоскости линзы и расположенном за ней на расстоянии l. Когда линзу передвинули на расстояние δ в направлении, перпендикулярном ее главной оптической оси, центр пятна сместился на величину Δ. Найдите фокусное расстояние линзы F.

20. С помощью установки, схема которой показана на рисунке 13, наблюдают дифракцию параллельного пучка белого света на дифракционной решетке $Д$, расположенной перпендикулярно оси пучка. При этом на экране $Э$, установленном в фокальной плоскости тонкой собирающей линзы $Л$, видны две светлые полосы, вызванные наложением спектральных компонент с длинами волн $\lambda_1 = 460$ нм и $\lambda_2 = 575$ нм. Эти полосы расположены симметрично относительно главной оптической оси линзы на расстоянии $l = 30$ см друг от друга. Найдите минимальный период решетки d, при котором наблюдается эта картина, если фокусное расстояние линзы $F = 20$ см.

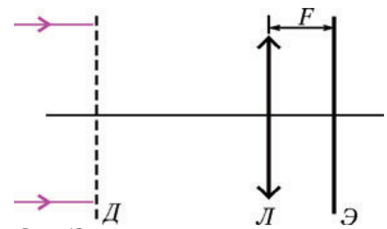


Рис. 13

Химический факультет

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Сформулируйте закон электромагнитной индукции Фарадея.

2. Что такое «резонанс»?

3. ЭДС источника тока изменяется со временем так, как показано на рисунке 14. К полюсам источника подключен соленоид. В каком промежутке времени максимальна величина ЭДС самоиндукции соленоида?

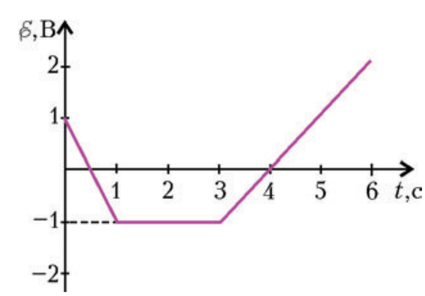


Рис. 14

4. Давление идеального газа в данном объеме увеличилось в 4 раза. Во сколько раз изменилась при этом (увеличилась или уменьшилась) средняя скорость движения его молекул?

5. Постройте ход луча *1* после тонкой рассеивающей линзы, если известен ход луча *2* для этой линзы (рис.15).

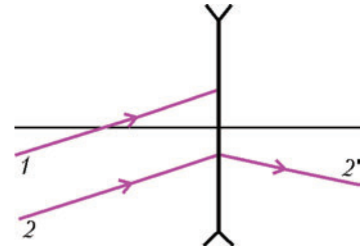


Рис. 15

6. Неоднородное бревно лежит на земле. Чтобы приподнять один конец бревна, требуется приложить к нему минимальную силу $F_1 = 425$ Н, а для того чтобы приподнять другой конец бревна, требуется минимальная сила $F_2 = 575$ Н. Найдите массу бревна.

7. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 10^{-5}$ Ф и катушки индуктивностью L = 0,2 Гн. Найдите амплитуду напряжения на конденсаторе в процессе гармонических колебаний, если сила тока в контуре равна I = 0,01 А в те моменты, когда напряжение на конденсаторе равно U = 2 В.

8. Брусок массой m = 1 кг лежит на горизонтальной поверхности стола. Если к бруску приложить силу F = 0,5 Н, направленную горизонтально, то брусок будет двигаться с ускорением $a = 0{,}3$ м/с^2. С каким ускорением a_1 будет двигаться брусок, если ту же силу приложить к нему под углом $\alpha = 45°$ (рис.16)? Принять $g = 10$ м/с^2.

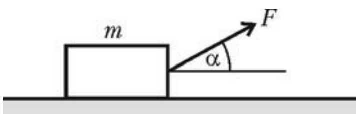


Рис. 16

9. В схеме, изображенной на рисунке 17, C = 100 мкФ, $\mathcal{E} = 20$ В. Найдите заряд q на обкладках конденсатора. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

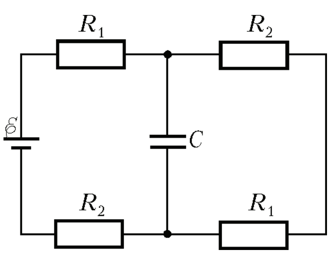


Рис. 17

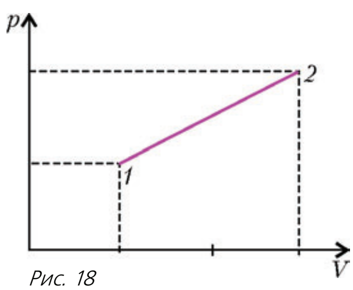


Рис. 18

10. Процессу, происходящему с одним молем одноатомного идеального газа, на p–V-диаграмме соответствует прямая линия (рис.18). При этом $p_2 = 2p_1$ и $V_2 = 3V_1$. Какое количество теплоты передано газу, если его начальная температура равна $T_1 = 180$ К? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К).

Вариант 2

1. Сформулируйте закон сохранения импульса для системы материальных точек.

2. Дайте определение понятия «сила постоянного тока».

3. Тело массой m = 0,5 кг движется вдоль оси OX под действием одной силы F. При этом его ускорение зависит от координаты так, как показано на графике (рис.19). Определите работу, совершаемую этой силой на первом этапе x = = 4 м пути.

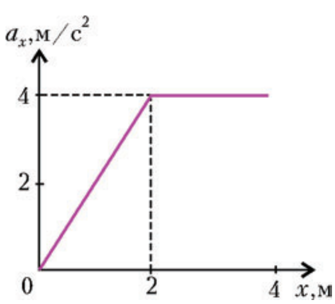


Рис. 19

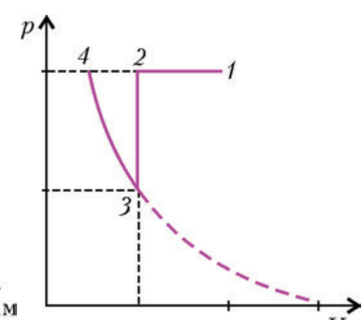


Рис. 20

4. Состояние некоторого количества идеального газа изменялось в соответствии с p–V-диаграммой, представленной на рисунке 20. Участок *3–4* – гипербола. Изобразите этот процесс на p–T-диаграмме.

5. Брусок движется равномерно под действием силы F = = 3 Н, направленной вверх вдоль наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Масса бруска m = 0,5 кг. С каким ускорением будет скользить брусок в отсутствие силы F? Принять $g = 10$ м/с^2.

6. Угол падения луча света из воздуха на стеклянную пластинку толщиной d = 4 см равен углу полного внутреннего отражения для границы раздела стекло–воздух. Внутри пластинки луч света проходит расстояние l = 4,5 см. Оцените по этим данным показатель преломления стекла n.

7. Некоторое количество идеального газа участвует в процессе, представленном на p–V-диаграмме (рис.21). Точки *1* и *2* лежат на одной изотерме. Найдите переданное газу количество теплоты в этом процессе. Значения p_1, V_1, V_2, p_2 определите по графику.

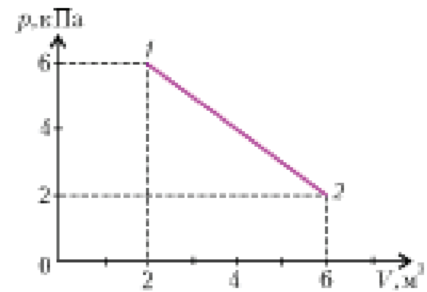


Рис. 21

8. Проволочная рамка вращается с постоянной угловой скоростью вокруг горизонтальной оси в однородном магнитном поле. Индукция поля равна $B = 2 \cdot 10^{-2}$ Тл и направлена вертикально. Площадь рамки $S = 100$ см^2. В тот момент, когда рамка расположена вертикально, ЭДС индукции в ней равна $\mathcal{E} = 6{,}3 \cdot 10^{-3}$ В. Найдите частоту вращения рамки.

9. Газовый лазер, работающий в непрерывном режиме, излучает ежесекундно $n = 3 \cdot 10^{17}$ фотонов. При этом к его разрядной трубке приложено напряжение U = 5 кВ и в ней протекает ток газового разряда I = 10 А. Считая длину волны излучения равной $\lambda = 6{,}6 \cdot 10^{-7}$ м, определите КПД такого процесса излучения. Принять, что постоянная Планка равна $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, а скорость света в вакууме составляет $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

10. Маленький заряженный шарик массой m = 180 мг подвешен на невесомой нити. Сила натяжения нити увеличивается вдвое, если к шарику поднести снизу на расстояние d = 6 см горизонтально расположенное кольцо из проволоки радиусом R = 8 см, несущее заряд Q = –50 нКл. При этом ось кольца совпадает с вертикальным направлением нити. Чему равен заряд q шарика? Принять $g = 10$ м/с^2. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 \approx 8{,}9 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Публикацию подготовили С.Аввакумов, В.Бенинг, С.Волошин, В.Воронин, Е.Григорьев, Д.Денисов, А.Зотеев, Н.Лёвшин, И.Ломов, Г.Медведев, В.Панферов, В.Погожев, А.Разгулин, И.Сергеев, А.Склянкин, В.Ушаков, Е.Хайлов, С.Чесноков, Е.Шикин, А.Щеглов, Б.Щедрин

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2005 г.)

1. Этого сделать нельзя. Занумеруем грани кубика цифрами от 1 до 6 так: верхняя – 1, нижняя – 6, левая – 5, правая – 3, передняя – 2, задняя – 4. Тогда циклические перестановки четырех цифр окружности соответствуют поворотам кубика на 90°, но сколько ни вращай кубик – не получишь новый кубик, где грани 1 и 6 переставлены, а все остальные грани остались на своих прежних местах.

2. Заметим, что в силу первого уравнения условия каждое из неизвестных по модулю не превышает 1, поэтому $x+1 \geq 0$, $y+1 \geq 0$, $z+1 \geq 0$. Сложив первое и второе уравнения условия, получаем $x^2(x+1)+y^2(y+1)+z^2(z+1)=0$. Это возможно лишь в единственном случае, когда каждое неотрицательное слагаемое в левой части равно нулю. Следовательно, каждое неизвестное может принимать значения либо 0, либо −1. Из второго уравнения условия следует, что значение −1 может принимать только одно неизвестное. Отсюда получаем единственно возможный ответ: $x + y + z = -1$.

3. Ясно, что увеличение или уменьшение одного из чисел a, b, x, y на 7 не влияет на делимость выражения $ab - xy$ на 7. Поэтому можно заменить каждое из данных чисел неотрицательным остатком от деления его на 7. Таким образом, можно считать, что данные семь чисел принимают значения от 0 до 6 (среди них могут быть равные).

Если среди них есть два нуля, то выберем $a = 0$ и $x = 0$, тогда при любых b и y выражение $ab - xy$ делится на 7.

Допустим теперь, что двух нулей нет, а ненулевых чисел не менее шести. Если все они различные, то это числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Тогда имеем $2\cdot5-1\cdot3=7$, что делится на 7. Пусть среди шести ненулевых чисел имеются равные числа. Если при этом имеется две пары равных чисел (или не менее четырех равных), то можно выбрать $a = x$ и $b = y$, и тогда $ab - xy$ делится на 7.

Осталось рассмотреть случай, когда имеется только одна группа равных чисел, и их в этой группе не более трех. Можно считать, что равные числа в группе – это единицы. В противном случае все семь чисел можно умножить на некоторое ненулевое число так, что равные числа станут единицами (ибо для любого ненулевого числа z существует число c такое, что zc имеет остаток 1 при делении на 7), причем сама эта процедура никак не повлияет на делимость или неделимость выражения $ab - xy$ на 7.

Рассмотрим набор 1, 1, a_1, a_2, a_3, a_4. Здесь последние четыре числа различные, и не исключено, что среди них может быть еще одна единица. Тогда произведения a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, также различны по модулю 7 (т.е. имеют различные остатки при делении на 7). Если a_2a_3 и a_1a_4 имеют равные остатки при делении на 7, то задача решена. Аналогичные слова можно сказать и о произведениях a_2a_4 и a_3a_4. Итак, либо среди произведений a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_2a_3, a_2a_4, a_3a_4 найдутся два, имеющих равные остатки при делении на 7(и тогда задача решена), либо все они дают разные остатки при делении на 7. В последнем случае, поскольку таких произведений шесть и они могут принимать (по модулю 7) только значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, среди них обязательно есть 1 (по модулю 7). Выберем два числа, которые дают такое произведение, в качестве a и b и положим $x = y = 1$. Тогда $ab - xy$ делится на 7, что и требовалось доказать.

4. Может. Отметим на плоскости узлы квадратной решетки 1×1, расположенные в форме квадрата со стороной $2k$. В квадратах 2×2 нарисуем одинаковые звезды, вершины которых лежат в отмеченных точках (рис.1). Очевидно, что таких звезд k^2.

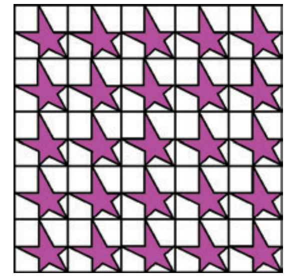


Рис. 1

Несложно подсчитать количество прямых, на которых лежат стороны всех этих звезд:

$$k + k + (2k - 1) + (3k - 2) + (3k - 2) = 10k - 5.$$

Заметим, что при $k \geq 10$ выполняется неравенство $k^2 \geq 10k-5$, т.е. в приведенной конфигурации уже при $k = 10$ количество звезд больше числа прямых.

5. а) Верно. Для доказательства просто укажем способ, как разбить произвольное четнолюбивое число на сумму двух нечетнолюбивых чисел. Если оно – однозначное (и притом больше 1), то его, очевидно, можно представить в виде суммы двух натуральных чисел, каждое из которых (согласно условию) можно считать нечетнолюбивым. Пусть теперь исходное четнолюбивое число – не менее чем двузначное. Запишем его в виде $m_1M_1m_2M_2m_3M_3\ldots$, где все M_i – цифры, стоящие на четных местах, а m_i – цифры, стоящие на нечетных местах. Мы намеренно не пытаемся изобразить, как оканчивается это число, потому что оно может иметь как четное, так и нечетное количество цифр, а последняя его цифра может быть как M, так и m – нам это безразлично. Для нас важнее начало числа. Первая его цифра (т.е. m_1) – ненулевая (запись чисел с нуля не начинается), а так как число – четнолюбивое, то $M_1 \geq m_1$, т.е. вторая цифра – тоже ненулевая. А теперь из данного числа образуем два других следующим образом.

- Первое число получим из исходного заменой всех его цифр M_i нулями, т.е. оно таково: $m_10m_20m_30\ldots$. Ясно, что оно – нечетнолюбивое, поскольку на четных местах стоят одни нули, и потому цифры, стоящие на нечетных местах, не меньше своих соседей.
- Второе число получим из исходного отбрасыванием его первой цифры m_1 и заменой всех остальных цифр m_i нулями, т.е. оно таково: $M_10M_20M_3\ldots$. Ясно, что оно – тоже нечетнолюбивое, поскольку и здесь на четных местах стоят одни нули.

Кроме того, так как и M_1 и m_1 – ненулевые цифры, то нет оснований подозревать, что какое-то из этих чисел начинается с нуля.

б) Неверно. Для доказательства достаточно привести пример нечетнолюбивого числа, которое нельзя представить в виде суммы двух четнолюбивых. В качестве такового можно взять число 109. Убедиться, что оно не может быть представлено в указанном виде, можно даже и прямым перебором (он не очень-то велик), но можно и по-другому. А именно: если одно из слагаемых – однозначное (от 1 до 9), то второе, очевидно, лежит в пределах от 108 до 100, а такие числа не являются четнолюбивыми. Допустим теперь, что оба слагаемых – двузначны. Пусть одно из них имеет вид $\overline{pq}$, т.е. содержит p десятков и q единиц. Если оно – четнолюбивое, то $p \leq q$. При вычитании его из числа 109, имеющего 10 десятков и 9 единиц, мы, очевидно, получим число, содержащее $(10 - p)$ десятков и $(9 - q)$ единиц. Но поскольку $p \leq q$, то $10-p > 9-q$, и второе слагаемое никак не будет четнолюбивым. Так что число 109 представить в указанном виде нельзя.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. По дуге окружности.

2. Может, если точки A и B движутся по двум концентрическим окружностям с одинаковыми угловыми скоростями.

3. Один оборот.
4. Будет, поскольку орбитальное движение Земли приводит к кажущемуся обращению Солнца вокруг нее с периодом в один год.
5. В два раза.
6. У второй, так как у нее больше нормальное ускорение.
7. Скорости спиц нижней половины колеса относительно земли меньше, чем верхней.
8. В каждый данный момент все точки диска, отстоящие от самой нижней точки C на одно и то же расстояние, будут иметь одинаковые по модулю скорости (рис.2).

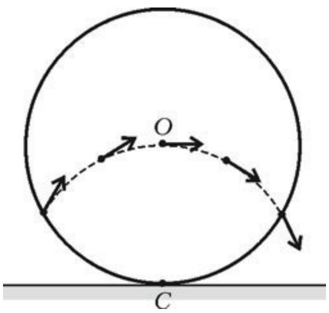


Рис. 2

9. Нет, не будет. Если бы катушка стала скатываться, то она начала бы вращаться вокруг точки C (см. рисунок к условию задачи). Но тогда точка B стала бы удаляться от точки A, т.е. нить AB стала бы растягиваться, что невозможно.
10. В инерциальной системе отсчета, которой была бы невращающаяся Земля, звезды оставались бы неподвижными на небесной сфере. Суточное же движение звезд с востока на запад указывает на вращение Земли в обратном направлении.
11. Нет, не будет – правый груз перетянет. Рисунок 3 поясняет ситуацию, как если бы нити были закреплены на гвоздях, откуда следует, что сила натяжения правой нити в действительности будет больше, чем левой.

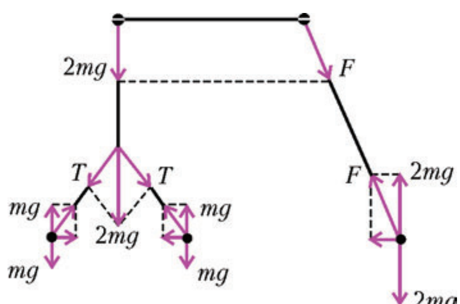


Рис. 3

12. а) В нижней точке; б) в двух крайних верхних точках.
13. Если лифт начнет падать в тот момент, когда грузик находится в одной из точек своего максимального отклонения от положения равновесия, то в дальнейшем грузик будет неподвижен относительно стенок лифта. Во всех других случаях грузик будет описывать круговую траекторию вокруг точки подвеса, причем наибольшая скорость вращения будет в том случае, если лифт начнет падать в момент, когда грузик проходит через нижнюю точку своей траектории.
14. На правые.
15. До соскальзывания на тело действует сила трения покоя, обеспечивающая нормальное и касательное ускорения и направленная под углом к радиусу описываемой телом окружности (рис.4).

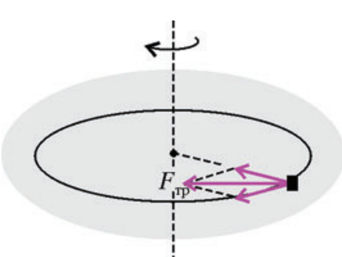


Рис. 4

16. На полюсах Земли этот период составляет одни сутки. По мере уменьшения широты места период будет расти. На экваторе Земли плоскость колебаний не будет изменять свое положение, и поэтому период можно считать бесконечно большим.
17. Отрицательный.
18. В зависимости от значения начального угла электрон станет двигаться по сжимающейся или растягивающейся спирали постоянного радиуса.

Микроопыт

Надо привести воду во вращение. Тогда ее поверхность приобретет вогнутую форму. Поплавок, опускаясь в углубление, сползет со спицы.

ЗАДАЧИ С ЖИДКОСТЯМИ

1. $\Delta h_2 = \frac{\rho_в}{\rho_{ст}} \Delta h_1$. **2.** $V = \frac{27}{77}\frac{Q}{p_0} \approx 0{,}1$ л.
3. $a = \frac{3}{4} g$. **4.** $p(5R) = p_0 + \rho g H + 12\rho\omega^2 R^2$.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Математика

Вариант 1

1. 64. *Указание.* Данное выражение равно $(x+y)^3$.
2. $(0; \log_2 3)$. *Указание.* Выполните замену $t = 2^x$.
3. 25. *Указание.* Проведем через середину M стороны AD прямую, параллельную BC. Пусть E и F – точки ее пересечения с CD и AB соответственно. Площадь трапеции равна площади параллелограмма $EFBC$, а расстояние от M до BC – полусумме расстояний до BC от точек A и D.
4. $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
5. 11. *Указание.* Докажите, что AD – высота треугольника BAC, а $\angle FAE = 90°$. Далее воспользуйтесь тем, что $AD^2 = FD \cdot DE = BD \cdot DC$.
6. $\left[-4; \frac{2\sqrt{101} - 25}{13}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{23}{13}; 2\right]$. *Указание.* Рассмотрите три случая: $x = 0$, $x > 0$, $x < 0$.
7. $150\sqrt{3}$. *Указание.* Проекция вершины пирамиды одинаково удалена от прямых, на которых лежат стороны треугольника. Таких точек четыре – это центры вписанной и трех вневписанных окружностей. Поскольку $V = \frac{1}{3} Sh$, наибольший объем соответствует наибольшей высоте, а наибольшая высота равна $r \operatorname{ctg} \alpha$, где r – наибольший из радиусов упомянутых окружностей.
8. $-8 \le a \le 6$. *Указание.* Функция

$$f(x) = 9|x-1| - 4x + \big|3x - |x+a|\big|$$

убывает при $x \le 1$ и возрастает при $x \ge 1$, поскольку при снятии знаков модулей в первом случае коэффициент при x равен $-9 - 4 \pm 3 \pm 1 < 0$, а во втором $9 - 4 \pm 3 \pm 1 > 0$. Таким образом, уравнение $f(x) = 0$, а с ним и данное уравнение, имеет хотя бы один корень тогда и только тогда, когда $f(1) \le 0$.
9. От A к B; 8 км/ч.
Пусть x и y – скорости лодки в направлении от A к B и от B к A соответственно. Тогда в первом направлении лодка прошла $(40+10)/2 = 25$ (км), а в противоположном $(40-10)/2 = 15$ (км), причем $\frac{25}{x} + \frac{15}{y} = \frac{8}{3}$ и $\frac{25}{x} \ge 1$, $\frac{15}{y} \ge 1$. Наибольшее значение $x_{max} = 25$ соответствует наименьшему значению $y_{min} = 9$, а наименьшее значение $x_{min} = 15$ – наибольшему значению $y_{max} = 15$. Поэтому $x > y$, т.е. река течет

от A к B, а максимальная скорость течения равна
$\dfrac{x_{\max} - y_{\min}}{2} = 8(\text{км/ч})$.

10. 1. *Указание.* Докажите, что

$$\Phi = \left\{(x, y, z)\Big||x| < 1, |y| < \frac{1}{8}, |z| < 1\right\}.$$

В самом деле, если $|x| < 1, |y| < \dfrac{1}{8}$ и $|z| < 1$, то для некоторого N при всех $n > N$ имеем $|x|^n < \dfrac{1}{9}$, $|8y|^n < \dfrac{1}{3}$, $|z|^n < \dfrac{1}{3}$, т.е. $3|x|^n + |8y|^n + |z|^n < 1$. И, наоборот, если $3|x|^n + |8y|^n + |z|^n < 1$, то и $|x| < 1$, $|y| < \dfrac{1}{8}$, $|z| < 1$.

Вариант 2

1. 28 мин. *Указание.* На пути от B до A скорость автобуса отличалась от исходной множителем $\dfrac{19}{20} < 1$, так что в пункт A он прибыл с 10-минутным опережением. Пусть x – время в пути от A до B по расписанию, а t – продолжительность остановки. Тогда $x = \dfrac{20}{19}x - 10$, т.е. $x = 190$, а $t = \dfrac{x}{5} - 10 = 28$.

2. –1. *Указание.* Пусть $a = x - 2$, $b = \log_2 x$. Тогда

$$|ab| + \big||a| - |b|\big| \le ab.$$

Но это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} ab \ge 0, \\ |a| = |b|. \end{cases}$$

3. $[1; 2) \cup (2; \sqrt{5}]$. *Указание.* Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{(3-x)^2 - (5-x^2)}{\dfrac{2x-7}{4} - \dfrac{x-5}{4}} \ge 0, \\ |x| \le \sqrt{5}. \end{cases}$$

4. 18; $r_1/r_2 \in (1/3; 1) \cup (1; 5/3)$. *Указание.* AB – касательная к первой окружности (это следует из того, что $\angle BAC = \dfrac{1}{2}\overset{\smile}{AC}$ – докажите это!). Но тогда $BE \cdot BC = AB^2$ и $BC = 18$. Поскольку при этом $BC - AB < AC < AB + BC$, то
$\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{AC}{BC} \in \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$, причем $r_1 \ne r_2$.

5. 0; $4 + 2\sqrt{3}$. *Указание.* Приведите первое уравнение к виду

$$\cos(x - \varphi) = \cos\varphi_1,$$

где $\varphi = \operatorname{arcctg}\dfrac{a-1}{\sqrt{3}}$, $\varphi_1 = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3 + (a-1)^2}}$, а второе – к виду

$$\sin y\left(\cos(y + \psi) - \cos\psi_1\right) = 0,$$

где $\psi = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{2}$, $\psi_1 = \arccos\left(-\dfrac{3}{2\sqrt{a^2 + 4}}\right)$. Далее получим, что
$x = 2\varphi + 2\pi n$, $y = \pi - 2\psi + 2\pi m$.

Вычислите теперь $\operatorname{ctg}\dfrac{x-y}{2}$ и найдите a из полученного уравнения.

6. $4\sqrt{6}$. *Указание.* Проведите через AC плоскость π, параллельную BD. Докажите, что $AB \perp \pi$, а $V_{ABCD} = V_{ACFD}$, где F – проекция точки D на плоскость π.

Вариант 3

1. $\left(0; \dfrac{1}{16}\right) \cup \left[\dfrac{1}{8}; \dfrac{1}{2}\right) \cup [1; +\infty)$. *Указание.* Перейдите к логарифмам по основанию 2.

2. $\left(x_n; \dfrac{\pi}{4} + \pi n - x_n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \ne -2, -1, 0, 1$, где

$x_n = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi n\right)^2 - 36}$

3. $(0; -1)$. *Указание.* Рассмотрите уравнение как квадратное относительно x. Условие неотрицательности его дискриминанта дает два целых значения: $y = -1$ и $y = 0$.

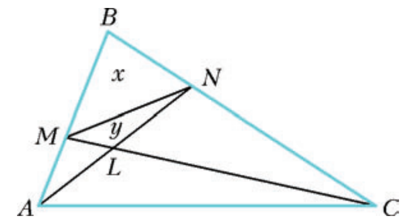


Рис. 5

4. $\dfrac{15}{2}$. *Указание.* Пусть $S_{MBN} = x$, $S_{MLN} = y$ (рис.5). Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{S_{NML}}{S_{NLC}} = \frac{S_{AML}}{S_{ALC}} \quad \text{и} \quad \frac{S_{BNM}}{S_{AMN}} = \frac{S_{BCM}}{S_{ACM}}.$$

5. $\dfrac{2\sqrt{42}}{3}$. *Указание.* Пусть $SH = h$ и $AB = a$ (рис.6), а R – искомый радиус. Тогда
$BH = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ и $h\sqrt{2} = a\sqrt{3}$.
Из подобия прямоугольных треугольников SHF и SEH следует равенство отношений $SH : HE = SF : HF$, значит,

$$\frac{h}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{4h^2 + a^2}}{a}.$$

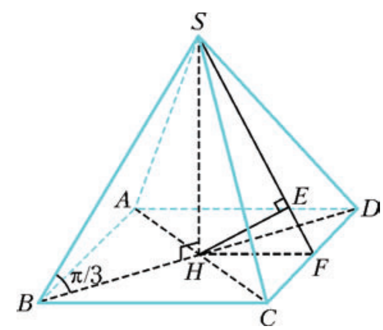


Рис. 6

Следовательно, $h = \sqrt{42}$ и $a = 2\sqrt{7}$. Осталось найти радиус сферы, совпадающий с радиусом окружности, описанной около треугольника BSD.

6. $\pm\arcsin\dfrac{\sqrt{3}+1}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
После замены $t = |\sin x|$, где $0 \le t \le 1$, исходное уравнение преобразуем в систему

$$\begin{cases} 4u^2 - 8tu - 4t - 1 = 0, \\ u = \sqrt{6t^2 + t}. \end{cases}$$

Первое уравнение, квадратное относительно u, дает два уравнения: $u = 2t + \dfrac{1}{2}$, $u = -\dfrac{1}{2}$ (что невозможно, так как из второго уравнения системы $u \ge 0$), так что $\sqrt{6t^2 + t} = 2t + \dfrac{1}{2}$, откуда следует, что $|\sin x| = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{4}$.

Вариант 4

1. $\left(0; \dfrac{5 - \sqrt{17}}{2}\right)$. **2.** $\pi + \operatorname{arcctg} 2 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $S_{100} = 15\,050$; $b_{40} = 81$. *Указание.* Обозначим первые члены и разности арифметических прогрессий $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ через a_1, d_1 и b_1, d_2 соответственно. Члены с четными номерами последовательности $\{c_n\}$ образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_2 + b_2$ и разностью $2d = 2(d_1 + d_2)$, а члены с нечетными номерами этой последовательности –

арифметическую прогрессию с первым членом $\left(-(a_1+b_1)\right)$ и разностью $(-2d)$. Поэтому сумма первых 40 членов последовательности $\{c_n\}$ равна

$$(c_1+c_3+\ldots+c_{39})+(c_2+c_4+\ldots+c_{40})=20d,$$

откуда $d=5$.

Сумма первых 23 членов последовательности $\{c_n\}$ равна

$$(c_1+c_3+\ldots+c_{23})+(c_2+c_4+\ldots+c_{22})=-(a_1+b_1)-11d=-60,$$

откуда $a_1+b_1=5$. Дальнейшее ясно.

4. $4\sqrt{10}-2\sqrt{15}$. *Указание.* Пусть h_A и h_C – расстояния от точки A до прямой CD и от точки C до прямой AD соответственно (рис.7). Тогда

$$h_A\cdot CD=h_C\cdot AD\Leftrightarrow\frac{AD}{CD}=\frac{h_A}{h_C}=\sqrt{\frac{2}{3}},$$

поэтому

$$AD=CD\sqrt{\frac{2}{3}}=20\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

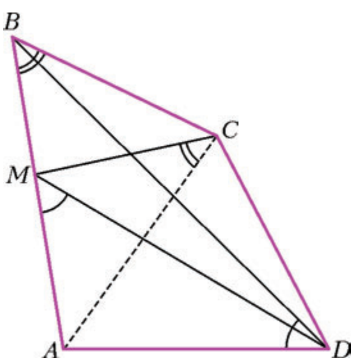


Рис. 7

Далее, из подобий $\Delta AMD\sim\Delta ADB$ и $\Delta ABC\sim\Delta ACM$ следует, что $AD^2=AM\cdot AB$, $AC^2=AM\cdot AB$, так что треугольник ACD – равнобедренный, $AC=AD=$ $=20\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $CD=20$. Находим его площадь, полупериметр, а затем и радиус вписанной окружности по формуле

$$r=\frac{S}{p}.$$

5. $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}-3\right]\cup\left(\frac{5\pi}{2}-6;\frac{7\pi}{2}-9\right]$. *Указание.* Возможны 3 случая:

1) $1\le x<2$; тогда $3x+a=\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Из того, что $0\le a\le\pi$ и $1\le x<2$, следует, что $n=0$. Итак, $x=\frac{\pi}{2}-\frac{a}{3}$.

2) $2\le x<3$; тогда аналогично получим $x=\frac{5\pi}{6}-\frac{a}{3}$.

3) $3\le x\le\pi$; получим $x=\frac{7\pi}{6}-\frac{a}{3}$.

Остается выписать значения a из указанного в условии задачи промежутка, для которых данное уравнение имеет нечетное число решений $x\in[1;\pi]$. Упростить этот отбор позволяет зависимость решений от параметра, изображенная на рисунке 8. Легко видеть, что при $a\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}-3\right]$ существуют три решения уравнения, а при $a\in\left(\frac{5\pi}{2}-6;\frac{7\pi}{2}-9\right]$ – одно решение.

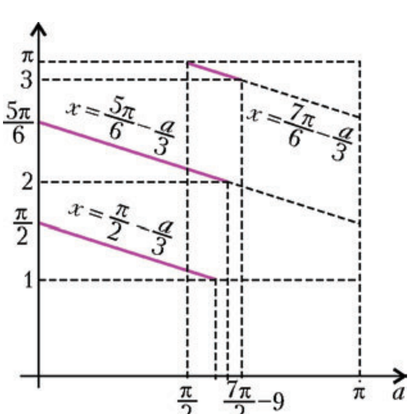


Рис. 8

6. 32.

Параллельные прямые AD и KN (рис.9), очевидно, лежат в одной плоскости. Пусть эта плоскость пересекает прямую BC в точке A_1. Поскольку K лежит на грани ABC, то A_1 принадлежит отрезку BC. Обозначим $x=\frac{KN}{AD}$. Тогда из подобия треугольников KA_1N и AA_1D, а также из сравнения площадей треугольников с общим основанием BC следует, что

$$x=\frac{KN}{AD}=\frac{KA_1}{AA_1}=\frac{S_{\Delta KBC}}{S_{\Delta ABC}}.$$

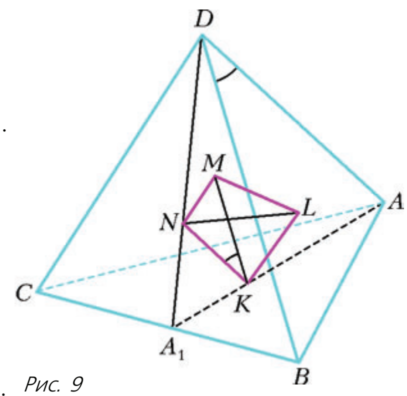


Рис. 9

Аналогично, если $y=\frac{KM}{BD}$ и $z=\frac{KL}{CD}$, то

$$y=\frac{S_{\Delta KAC}}{S_{\Delta ABC}}\text{ и }z=\frac{S_{\Delta KAB}}{S_{\Delta ABC}}.$$

Поскольку точка K принадлежит грани ABC, получаем равенство

$$x+y+z=\frac{1}{S_{\Delta ABC}}\left(S_{\Delta KBC}+S_{\Delta KAC}+S_{\Delta KAB}\right)=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}}=1.$$

Преобразуем равенство из условия задачи:

$$2(AD\cdot KM+BD\cdot KN)=AD\cdot BD\Leftrightarrow\frac{KM}{BD}+\frac{KN}{AD}=\frac{1}{2},$$

т.е. $x+y=\frac{1}{2}$. Значит, $z=\frac{1}{2}$. Из параллельности сторон следуют равенства пар углов

$$\angle MKN=\angle ADB,\ \angle LKN=\angle ADC,\ \angle LKM=\angle BDC.$$

Тогда равны трехгранные углы $DABC$ и $KNML$ (по трем плоским углам).

Известно, что отношение объемов двух тетраэдров с равными трехгранными углами при вершине равно отношению произведений длин ребер, выходящих из этой вершины. Таким образом, используя условия задачи, находим

$$\frac{V_{DABC}}{V_{KNML}}=\frac{DA\cdot DB\cdot DC}{KN\cdot KM\cdot KL}=\frac{1}{xyz}=64,$$

а с учетом равенства $z=\frac{1}{2}$ получаем и отношение площадей:

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta KMN}}=\frac{1}{xy}=32.$$

Вариант 5

1. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{2\pi n}{5}$, $\frac{2\pi n}{9}$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

2. $[-1;0)$.

3. $-\frac{1}{2\sqrt{3}}\log_{\frac{5}{3}}3$; $\frac{1}{\sqrt{3}}\log_{\frac{5}{3}}4\sqrt{3}$.

4. $\frac{qs-t^2}{t}$.

5. $\left(\frac{5}{3};-\frac{7}{3}\right)$. *Указание.* В первом уравнении выполните замену $t=\sqrt{x-y}$ и решите полученное уравнение.

6. 8. *Указание.* Пусть AB – диаметр, на котором лежит точка H, а $HO=x$ (рис.10). По свойству отрезков хорд, $LH\cdot HN=(R-x)(R+x)$. Но $MH^2=LH\cdot HN$, откуда $MH^2=MK^2-x^2=R^2-x^2$, т.е. $MK=R=8$.

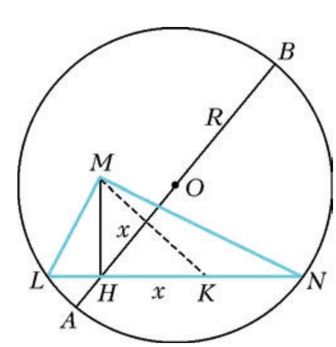


Рис. 10

7. $\left(\frac{1}{a}; +\infty\right)$ при $a \in \left(\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$,

$\left(0; \frac{1}{a}\right)$ при $a \in \left(\sqrt{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$,

$\varnothing$ при остальных a.

Указание. Неравенство равносильно такому:

$$\frac{\log_2 \frac{a}{2}}{\log_2 ax} \frac{\log_2 (a-1)}{\log_2 \left(a^2-2\right)} < 0 .$$

Далее, пользуясь тем, что в области определения функции $w = \log_v u$ знак ее совпадает со знаком выражения $(u-1)(v-1)$, приводим неравенство к виду

$$\frac{\frac{a}{2}-1}{ax-1} \frac{(a-1)-1}{\left(a^2-2\right)-1} < 0 .$$

8. $5\sqrt{6}/3$.

Центр O сферы, проходящей через вершины прямоугольного треугольника MNL, находится на перпендикуляре к плоскости треугольника MNL, проходящем через центр окружности, описанной около треугольника MNL, т.е. через середину гипотенузы ML (рис.11).

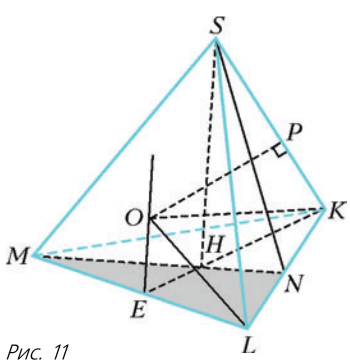


Рис. 11

Пусть $OL = OP = R$ – радиус этой сферы (P – точка ее касания с ребром SK), $ML = a$, $SH = h$, $SN = k$. Тогда по цепочке прямоугольных треугольников имеем: $OL^2 - EL^2 + KE^2 - OP^2 = PK^2$, т.е. $R^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - R^2 = PK^2 \Rightarrow PK = \frac{a}{\sqrt{2}}$. По условию, $KP : PS = 1:2 \Rightarrow SK = \frac{3a}{\sqrt{2}}$.

Далее: в ΔSHK $\quad h = a\sqrt{\frac{9}{2}-\frac{1}{3}} = \frac{5a}{\sqrt{6}} \Rightarrow a = \frac{h\sqrt{6}}{5}$.

Наконец,

$$k = \sqrt{SK^2 - NK^2} = a\sqrt{\frac{9}{2}-\frac{1}{4}} = a\frac{\sqrt{17}}{2} =$$

$$= \frac{h\sqrt{6}}{5}\frac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow k = h\frac{\sqrt{16}}{5}\frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Задавая по условию $k = \sqrt{17}$, находим $h = SH = \frac{5\sqrt{6}}{3}$.

Вариант 6

1. ± 1. **2.** $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **3.** $\frac{\pi}{10}(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **4.** 10. **5.** $(2; 0)$.

6. 2. *Указание.* Если x_0 – корень данного уравнения, то и $x_1 = \frac{x_0+1}{3x_0-1}$ – тоже его корень, поскольку тогда $x_0 = \frac{x_1+1}{3x_1-1}$ и $|x_1| + \left|\frac{x_1+1}{3x_1-1}\right| = a$. Следовательно, для того чтобы число корней было нечетным, необходимо, чтобы один из них был корнем уравнения

$$x = \frac{x+1}{3x-1},$$

т.е. либо $x = 1$, либо $x = -\frac{1}{3}$, для которых либо $a = 2$, либо $a = \frac{2}{3}$. Осталось проверить полученные значения a.

Вариант 7

1. ± 1. **2.** $-\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $16\sqrt{5}$. **4.** $[1; 2)$.

5. 4. *Указание.* Пусть x и y – скорости первого и второго спортсменов. Тогда

$$\begin{cases} \frac{10000}{y} = \frac{10000}{x} + \frac{50}{3}, \\ \frac{800}{x-y} = \frac{10000}{x} - \frac{130}{3}. \end{cases}$$

Отсюда найдите x и y, а затем и количество обгонов.

6. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. *Указание.* Из первого уравнения системы следует, что сумма расстояний от точки $M(x; y)$ до точек $A = (-1; -1)$, $B(1; 11)$ равно длине отрезка AB, а это значит, что M лежит на этом отрезке. Но тогда $y + 1 = (x+1)\frac{12}{2}$, $0 \le x+1 \le 2$.

7. $\frac{\pi}{35}$. *Указание.* Докажите, что при всяком рациональном $x = \frac{p}{q}$ имеет место равенство $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} f(1)$, так что $f\left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{2}{7} f(1)$, но условие $f(10) = -\pi$ означает, что $f(1) = -\frac{\pi}{10}$.

Вариант 8

1. 4. **2.** $\sin\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. **3.** $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **4.** 10 ч.

5. 7. *Указание.* Для многочлена $p(x)$ сумма коэффициентов равна $p(1)$, а свободный член равен $p(0)$.

6. 1:3. *Указание.* Найдите координаты точки пересечения прямых AC и BD. Для этого запишите уравнения этих прямых.

Вариант 9

1. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $2\pi k$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$.

2. 150. *Указание.* Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен полуразности оснований.

3. $\left[\frac{4}{5}; 1\right)$.

4. $\frac{3\pi}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$. *Указание.* Система задает на плоскости $(x; y)$ круговой сектор, центр которого находится в точке $(2; 1)$, радиус равен $\sqrt{2}$, а центральный угол составляет 270°.

5. 26.

Если на каждом из N станков вытачивали по x деталей в день, то потом стали вытачивать по $1{,}2x$. Поэтому x делится на 5, а $Nx = 5850$. Кроме того, $(N-4)\cdot 1{,}2x \ge Nx > (N-5)\cdot 1{,}2x$, откуда следует оценка $30 > N \ge 24$. Но $5850 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$ делится на N. Значит, $N = 26$.

6. $\pi\sqrt{\frac{7}{2}}$. *Указание.* Пусть A – вершина конуса, AB и AC – данные образующие. Есть 2 возможности: $\angle BAC = 45°$ либо

$\angle BAC = 135°$. Угол развертки конуса равен $\gamma = 2\pi \frac{r}{l}$, где l – длина образующей, а r – радиус основания конуса. Вычислите отношение $\frac{r}{l}$ для обоих возможных случаев и получите ответ.

Вариант 10

1. $\{-1\} \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. **2.** $\left[-3; \frac{\sqrt{41}-5}{4}\right]$. **3.** 1; $\frac{\sqrt{85}}{2}$.

4. 5π. *Указание.* Уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \cos 2x + 5\cos x + 4 = 0, \\ x - 15 - 5\cos x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}, \\ x \ge 10. \end{cases}$$

Отсюда $n \ge 2$, поэтому наименьший корень данного уравнения равен $x = 5\pi$.

5. 0 либо 3.

6. $\left[\frac{2}{3}; 1\right) \cup [3; +\infty)$. *Указание.* В области определения, т.е. при $x > 0$, $x \ne 1$, равносильны следующие переходы:

$$\frac{1}{\log_{x+\frac{1}{3}} x} \le \frac{2}{\log_{x+\frac{1}{3}} (2x+3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{x+\frac{1}{3}}(2x+3) - \log_{x+\frac{1}{3}} x^2}{\log_{x+\frac{1}{3}} x \cdot \log_{x+\frac{1}{3}}(2x+3)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(2x+3-x^2\right)}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 (x-1)(2x+2)} \le 0.$$

7. $[-1; 5]$.

Пусть $y = x + a$, тогда данное неравенство принимает вид

$$|y-2| + 2|y-2a+2| \le 3.$$

Раскрывая первый из модулей, запишем это неравенство в виде системы

$$\begin{cases} y - 2 \le 3 - 2|y-2a+2|, \\ y - 2 \ge -3 + 2|y-2a+2|, \end{cases}$$

или

$$-1 + 2|y-2a+2| \le y \le 5 - 2|y-2a+2|.$$

Отсюда следует, что переменная y не может принимать значений, выходящих за пределы отрезка $[-1; 5]$. Покажем, что искомым множеством является весь этот отрезок. Достаточно убедиться, что граничные значения достигаются. Действительно, $y = -1$ получаем из равенства $-1 - 2a + 2 = 0$, т.е. при $a = \frac{1}{2}$. Аналогично, $y = 5$ получается при $5 - 2a + 2 = 0$, т.е. для $a = \frac{7}{2}$.

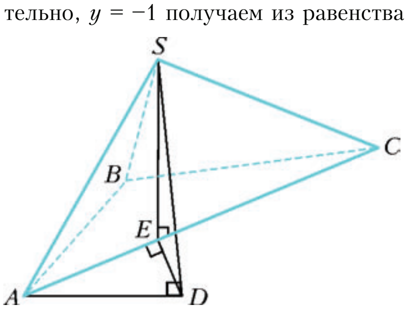


Рис. 12

8. $\frac{12}{5}$. *Указание.* Вычислите двумя способами объем V пирамиды $SABC$. Пусть h — искомая величина, тогда $V = \frac{1}{3} h S_{ASC} = \frac{1}{3} SD \cdot S_{ABC}$ (рис.12). Найдите SD и площадь треугольника ASC (для чего найдите его высоту SE).

Вариант 11

1. $0, \pm 1, \pm 2, +3$. **2.** 240. **3.** $\left(-\frac{3}{4}; 0\right) \cup (3; +\infty)$. **4.** 2π.

5. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* После замены $v = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$ уравнение приводится к виду $3v^3 - 2v^2 + v - 2 = 0$, или $(v-1)\left(3v^2 + v + 2\right) = 0$.

6. 2; $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$. *Указание.* Пусть $AC = x$, $CD = l$. По свойству биссектрисы, $l^2 = 2x - 2(x-2) = 4$, т.е. $l = 2$.

7. 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. *Указание.* Квадратный трехчлен относительно x отрицателен при всех x тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен.

Вариант 12

1. $\frac{9\pi}{8}(4k+1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{9}} \sin 4x = 0, \\ \log_{\frac{1}{9}} \operatorname{ctg}\frac{2x}{9} = 0. \end{cases}$$

2. 18.

3. 962500 руб. *Указание.* Среди чисел от 1 до 1000 на 13 делятся 76 чисел, на 5 делятся 200 чисел, а на 5 и 13 одновременно делятся 15 чисел.

4. $\left[1-\sqrt{23}; -\frac{7}{2}\right) \cup \left(-\frac{7}{2}; -\sqrt{\frac{34}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{34}{3}}; 4\right)$.

Указание. Переходя к основанию $a = \sqrt{5} - 2 < 1$, имеем

$$\log_a (4-x) + \log_a |2x+7| \ge \log_a \left(x^2 + x - 6\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4-x) \cdot |2x+7| \le x^2 + x - 6, \\ 4 - x > 0, \quad x \ne -\frac{7}{2}. \end{cases}$$

5. $2\sqrt{3} + 4$, $2\sqrt{3} + 4$, $4\sqrt{3} + 6$.

Так как K, M, N – точки касания вписанной окружностью сторон треугольника ABC, то $BM = BN$, $AN = AK$, $CM = CK$ (рис.13). Из $AK = CK$ следует, что $AB = BC$, а в треугольнике KMN $\angle N = \angle M = 75°$, $\angle K = 30°$.

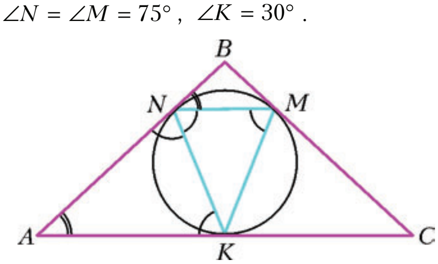


Рис. 13

Вписанная в треугольник ABC окружность является описанной около треугольника KNM. Пусть R – ее радиус, тогда $MN = 2R\sin 30° = R$, $MK = NK = 2R\sin 75° = \frac{R}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Вычисляя произведение $MN \cdot MK \cdot NK$, находим, что

$$R = \sqrt{3}, MN = \sqrt{3}, \ MK = NK = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{2}}.$$

Угол ANK, как угол между касательной и хордой, равен углу NMK, так что $\angle ANK = \angle AKN = 75°$, поэтому треугольники ANK и KNM подобны. Следовательно,

$$\frac{AK}{KN} = \frac{KN}{NM}, \text{ и } AK = 2\sqrt{3} + 3,$$

значит, $AC = 2AK = 6 + 4\sqrt{3}$.

Наконец, из подобия равнобедренных треугольников ABC и

NBM вытекает равенство

$$\frac{AN+BN}{BN}=\frac{AC}{NM}\text{, откуда } BN = 1.$$

Таким образом, $AB = BC = AN + BN = 2\sqrt{3}+4$.

6. $\left(-\frac{2}{3};1\right)$, $\left(-1-\frac{1}{l-1};l^2+l-1\right)$, $\left(-1+\frac{1}{l+2};l^2+l-1\right)$, $l\in\mathbf{Z}$, $l\neq -5, -2, 1, 4$.

Указание. Исходное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases}|\cos\pi y| = 1,\\ y+2\neq 0, \quad |y+2|\neq 21,\\ y(x+1)^2-x^2+x+1=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=k\in\mathbf{Z}, \quad k\neq -2, -23, 19,\\ (k-1)x^2+(1+2k)x+k+1=0.\end{cases}$$

При $k = 1$ имеем $x=-\frac{2}{3}$, т.е. $\left(-\frac{2}{3};1\right)$ – решение.

При $k\neq 1$ квадратное уравнение имеет рациональные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант является квадратом целого числа:

$$D = 4k+5 = m^2,\ m\in\mathbf{Z}.$$

Следовательно, $m = 2l + 1$, т.е.

$$k = l^2+l-1,\ l\in\mathbf{Z}.$$

Неравенство $k\neq 1$ приводит к ограничению $l\neq 1, -2$. Учтем теперь, как выражаются в терминах переменной l условия $k\neq -2$, $k\neq -23$, $k\neq 19$. Первые два из них выполнены всегда, а условие

$$k\neq 19 \Leftrightarrow l\neq 4, -5.$$

Осталось найти решения квадратного уравнения из последней системы и записать ответ.

7. $(0;16\pi)$. *Указание.* Числитель дроби из левой части данного выражения всегда положителен, а знаменатель неотрицателен. Таким образом, на области определения заданное неравенство выполнено всегда при условии необращения в ноль знаменателя, что равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}-22\le y-x\le 4,\\ -14\le y+x\le 4,\\ x\neq 4,\\ \left|\sqrt{9\sqrt{128}-9x}+x\right|+|y+5|\neq 0.\end{cases}$$

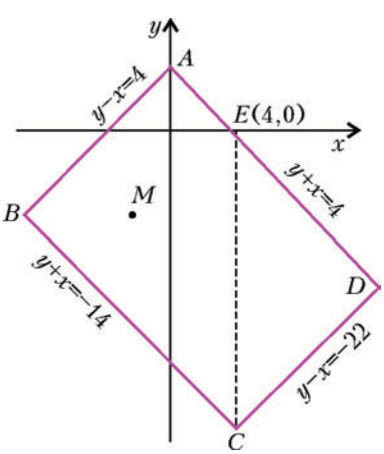


Рис. 14

Первые два неравенства задают на плоскости $(x;y)$ прямоугольник (рис.14) с вершинами в точках $A(0;4)$, $B(-9;-5)$, $C(4;-18)$ и $D(13;-9)$, стороны которого наклонены под углом 45° к осям координат. Последние же два неравенства соответствуют «разрезу» по отрезку прямой EC (здесь $E(4;0)$) и «выколотой» точке $M\left(-\sqrt{72\sqrt{2}-97};-5\right)$. Таким образом, следует рассмотреть круги, расположенные в четырехугольнике $ABCE$ и не содержащие точку M, и круги, целиком содержащиеся в треугольнике CDE.

Вариант 13

1. $[1;+\infty)$. **2.** $(-\infty;-2]$. **3.** -3. **4.** $-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}$. **5.** 6; 8; 10; 12.

6. $(2;3)$; $(3;2)$; $(3;3)$; $(4;3)$; $(5;4)$. *Указание.* Из первого неравенства данной системы следуют оценки

$$\begin{cases}|x-3|<\sqrt{5},\\ |y-4|<\sqrt{5}.\end{cases}$$

Это означает, что $1\le x\le 5$ и $2\le y\le 6$.
Второе неравенство дает

$$y\le\frac{x+11}{4},\quad x\ge 4y-11,$$

откуда

$$2\le y\le 4.$$

Теперь все целочисленные решения системы неравенств можно найти перебором.

7. $90\sqrt{3}$.

8. $(-\infty;1]\cup\left\{\frac{5}{4}\right\}\cup\left[\frac{4}{3};+\infty\right)$. *Указание.* Разделив обе части исходного уравнения на $4^x\neq 0$, перейдем к переменной $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x>0$. Зависимость t от x строго монотонна, поэтому каждому $t > 0$ соответствует ровно одно значение x. Таким образом, надо найти все значения a, при которых в области $t > 0$ уравнение

$$(3a-4)t^2-(2a-3)t-(a-1)=0$$

имеет единственное решение. Корни этого уравнения (при $a\neq\frac{4}{3}$): $t_1 = 1$ и $t_2=\frac{1-a}{3a-4}$. Случай $a=\frac{4}{3}$ очевиден.

Вариант 14

1. ± 3. **2.** $(-\infty;1]\cup(\log_2 11;+\infty)$.

3. $-\frac{\pi}{12}+2\pi k$, $-\frac{11\pi}{12}+2\pi n$, $k,n\in\mathbf{Z}$.

4. $\arccos\frac{5}{8}+\frac{\pi}{2}$; $4\sqrt{\frac{22}{13}}$. *Указание.* Пусть $BM\perp AD$, $CK\perp BM$ (рис.15), $AB = AC = BD = x$. Найдите BK, а затем составьте уравнение относительно x, пользуясь теоремой Пифагора.

5. 5. *Указание.* Пусть u и v – скорости черепахи и Ахилла соответственно. Пусть также в первой игре черепаха двигалась p минут, во второй – q минут, а Ахилл – r и s минут соответственно. Тогда

$$\begin{cases}v=50u,\\ p+r\ge 15,\\ q+s\le\frac{3}{2},\\ pu+rv+10u+v=uq+vs.\end{cases}$$

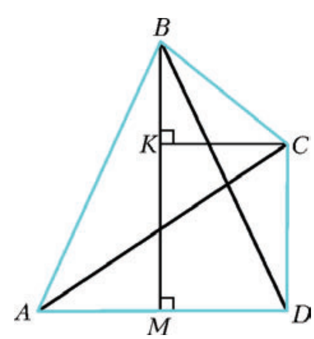


Рис. 15

Докажите, что неравенства этой системы на самом деле являются равенствами.

6. $0<|a|\le 2$. *Указание.* Выполнив замену $t=\sin x$, приходим к такой переформулировке задачи: при каких значениях a уравнение $y=\frac{4t+a}{4a-2t}$ имеет корень на отрезке $[-1;1]$ для любого $y\in[0;1]$?

Решая это уравнение относительно t, получаем $t = 2a - -\frac{9a}{2(y+2)}=f(y)$. Ясно, что $a\neq 0$. При $a\neq 0$ функция

$2-\dfrac{9}{2(y+2)}$ монотонно возрастает на отрезке $[0; 1]$, а t при этом принимает значения от $f(0)=-\dfrac{a}{4}$ до $f(1)=\dfrac{a}{2}$. Условие $|t| \le 1$ означает, что $\left|\dfrac{a}{4}\right| \le 1$, $\left|\dfrac{a}{2}\right| \le 1$.

Вариант 15

1. $(-\infty; -1) \cup (-1; 5]$. **2.** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $\pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+2\pi k$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

3. $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$. *Указание.* После замены $y = x + 2$ уравнение принимает вид

$$\sqrt{y-1}+\sqrt{y^2-1}=y\sqrt{y},$$

откуда

$$\begin{cases} y^2-1=\left(y\sqrt{y}-\sqrt{y-1}\right)^2, \\ y\sqrt{y} \ge \sqrt{y-1}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \left(\sqrt{y^2-y}-1\right)^2=0, \\ y \ge 1. \end{cases}$$

Отсюда $y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, т.е. $x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

4. 5%.

5. $\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{6}; -\dfrac{1}{10}\right)$. *Указание.* Замена $t=\log_{4|x|+1}(6x+2)$ приводит к неравенству

$$t-\frac{1}{t}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<t<1 \\ t<-1. \end{array}\right.$$

6. $\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3}; \dfrac{7\pi}{12}; \dfrac{11\pi}{12}$ либо $\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{2\pi}{3}; \alpha; \dfrac{5\pi}{6}-\alpha$, где $\alpha=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4-\sqrt{3}}}$.

Последовательно обозначая вершины, получаем три различных четырехугольника: $ABCD$, $ACBD$ и $ABDC$ (другие отличаются лишь направлением перечисления последовательно идущих вершин).

а) Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ (рис.16,*а*). Пусть E – точка пересечения прямых AD и BC. Тогда треугольники

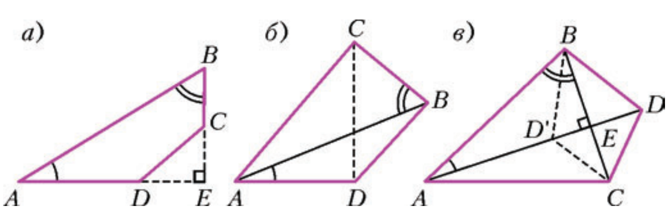


Рис. 16

AEB и CED прямоугольные, так как $\angle BAD+\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$. Поэтому $BE=AB\sin\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$, $AE=AB\cos\dfrac{\pi}{6}=3$. Следовательно, $CE = BE - BC = 2-\sqrt{3}$, $DE = AE - AD = 1$. Из треугольника CED имеем $\operatorname{tg}\angle CDE=2-\sqrt{3}$, т.е. $\angle CDE=\operatorname{arctg}\left(2-\sqrt{3}\right)=\dfrac{\pi}{12}$.

Теперь находим углы четырехугольника $ABCD$:

$$\angle ADC=\pi-\angle CDE=\frac{11\pi}{12}, \quad \angle BCD=\frac{7\pi}{12}.$$

б) В четырехугольнике $ADBC$ (рис.16,*б*) из треугольника ABD по теореме косинусов получаем, что $BD = 2$, следовательно, треугольник ABD равнобедренный, поэтому $\angle ABD=\dfrac{\pi}{6}$, так что $\angle ADB=\dfrac{2\pi}{3}$, $\angle DBC=\dfrac{\pi}{2}$.

Из треугольника ABC находим с помощью теоремы косинусов, что $AC=2\sqrt{4-\sqrt{3}}$. Из прямоугольного треугольника CBD следует $CD^2=4\left(5-2\sqrt{3}\right)$.

Пусть $\alpha=\angle CAD$, тогда из теоремы косинусов для треугольника ACD имеем

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4-\sqrt{3}}}.$$

Осталось найти последний из углов четырехугольника.

в) В четырехугольнике $ABDC$ (рис.16,*в*) прямые AD и BC пересекаются в точке, которую мы обозначим через E, под прямым углом. Так же, как в п. а), находим $AE=2\sqrt{3}\times\cos\dfrac{\pi}{6}=3$. Но по условию $AD = 2$, следовательно, точка D занимает положение D', так что четырехугольник $ABDC$ не является выпуклым, т.е. не отвечает условию задачи.

7. $12\sqrt{2}$. *Указание.* Пользуясь тем, что

$$4xy=(x+y)^2-(x-y)^2, \quad 2\left(x^2+y^2\right)=(x+y)^2+(x-y)^2,$$

преобразуйте исходное выражение к виду

$$\left(\left(p^2-2p+4\right)^2-(x+y)^2\right)\left(\left(p^2+2p+4\right)^2-(x-y)^2\right)=0,$$

откуда

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=p^2-2p+4 \\ x+y=-\left(p^2-2p+4\right) \\ x-y=p^2+2p+4 \\ x-y=-\left(p^2+2p+4\right). \end{array}\right.$$

При каждом значении p уравнения этой совокупности задают четыре прямые на координатной плоскости $(x; y)$. Поскольку

$$p^2-2p+4=(p-1)^2+3 \ge 3, \quad p^2+2p+4=(p+1)^2+3 \ge 3,$$

указанные прямые не проходят только через точки области, определяемой системой неравенств

$$\begin{cases} |x+y|<3, \\ |x-y|<3, \end{cases}$$

задающей внутренность квадрата со стороной $3\sqrt{2}$.

Вариант 16

1. Можно. С 8 руб. 50 коп. по 16 руб. 00 коп. включительно.

2. $(5; +\infty)$. **3.** $(0; 0)$. **4.** $1+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

5. 69 руб. 43 коп.

Пусть истинная сдача составляла сумму $100x + y$ (коп.), где x, y – натуральные числа из промежутка $[1; 99]$. Тогда выданная кассиром сдача была равна $100y + x$ (коп.). Из условия следует уравнение

$$100y + x = 140 + 300x + 3y.$$

Поскольку $43 \le 3y+40 \le 337$, сравнивая количество единиц и сотен в обеих частях уравнения, приходим к четырем возможным случаям:

1) $\begin{cases} x=3y+40, \\ y=3x+1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 100+x=3y+40, \\ y-1=3x+1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 200+x=3y+40, \\ y-2=3x+1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 300+x=3y+40, \\ y-3=3x+1. \end{cases}$

Первые три системы не имеют решений в натуральных числах. Решением последней является пара $x = 31$, $y = 97$. Итак, истинная сдача составляла 31 руб. 97 коп., так что общая сумма покупок равна 100 руб. − 31 руб. 97 коп. + + 1 руб. 40 коп. = 69 руб. 43 коп.

6. $a \ge 0$. *Указание.* Введем новую переменную $t=\log_2\left(\dfrac{1}{x}-2\right)$. Здесь $0 < x < 2$. При условии задачи $x<\dfrac{1}{3}$ имеем $t > 0$.

Итак, нужно найти все значения a, при которых для любого $b > 0$ существует хотя бы одно положительное решение уравнения

$$\frac{2a}{t} = t - b \text{, или } t^2 - bt - 2a = 0 .$$

Если $a > 0$, дискриминант $D = b^2 + 8a$ квадратного уравнения положителен, следовательно, существуют два решения, которые имеют различные знаки при любом b.
Если $a = 0$, то уравнение имеет корни $t = 0$ и $t = b$, второй из которых положителен тогда и только тогда, когда $b > 0$.
Пусть $a < 0$. Тогда всегда можно подобрать положительное значение b так, чтобы было выполнено неравенство $D < 0$ и квадратное уравнение не имело решений.
Итак, ответом задачи является множество значений параметра, удовлетворяющих условию $a \geq 0$.

7. *Указание.* Выпустим на трассу в произвольной точке A кольцевой дороги машину со 150 л бензина. Пусть на всех пунктах заправки эта машина забирает весь имеющийся бензин. Совершив полный круг, машина вернется в точку A со 150 л бензина. Проследим теперь, в какой точке трассы запас бензина в машине был минимален. Это будет в одном из пунктов заправки. Если явиться к этому пункту с пустым баком, залить имеющиеся 30 л и отправиться в путь, то заведомо удастся проехать весь маршрут (убедитесь в этом).

Вариант 17

1. 0; 4. **2.** $\pm\frac{1}{2}$. **3.** 2. **4.** $\frac{11}{3}$. **5.** $\left(-4; \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$.

6. 20; 18000. *Указание.* Если группа школьников состояла из n человек, а взнос каждого составил m рублей, то

$$mn = (m+100)(n-2) ,$$

откуда

$$m = 50n - 100.$$

С другой стороны, для цены музыкального центра справедливо неравенство

$$17000 < n(50n - 100) < 19500 ,$$

из которого следует, что $n = 20$.

Вариант 18

1. 126. **2.** $\left(-\frac{3}{2}; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup [-1; 0) \cup \left(0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

3. $\frac{1}{2}$. *Указание.* Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \left|8x^2 - 2x - 1\right| + \left|2x^2 - 5x + 2\right| \leq 0, \\ \left|2x^2 - 5x + 2\right| < 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|8x^2 - 2x - 1\right| = 0, \\ \left|2x^2 - 5x + 2\right| = 0. \end{cases}$$

4. $4\sqrt{3}$.

5. Утверждение верно. *Указание.* Вводя переменную $t = \sin x$, $t \in [-1; 1]$, находим множество значений данной функции: $-4 \leq y \leq \frac{17}{8}$.

6. 20%.

7. $\frac{\pi}{2}$; $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Возможны два варианта расположения вершины S пирамиды – S' и S'' (рис.17,*а* и 17,*б*).
Пусть высота пирамиды равна h, тогда длина ребра куба равна $2h$.
1) Точка S' находится внутри куба $ABCDA'B'C'D'$; очевидно, S' – центр куба (см. рис.17,*а*). Проведем через S' прямую, параллельную $A'B$. Эта прямая пересекает ребра $A'D'$ и BC в их серединах – точках K и L соответственно. Угол между AS' и KL, величину которого обозначим через α, – искомый.

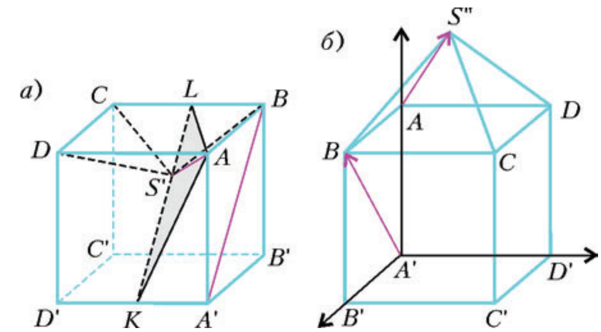


Рис. 17

Пересекающиеся прямые AS' и KL определяют плоскость, в которой находится треугольник AKL. Из вышесказанного следует $KS' = LS'$. Кроме того, $AK = AL$, так как треугольники $AA'K$ и ABL равны. Поэтому $AS' \perp KL$ как медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, т.е. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

2) Точка S'' находится вне куба (см. рис.17,*б*). Решим задачу для разнообразия координатно-векторным методом.
Введем прямоугольную систему координат с центром в точке A' и с осями, направленными по ребрам $A'B'$, $A'D'$ и $A'A$. Тогда интересующие нас точки имеют такие координаты: $A'(0; 0; 0)$, $B(2h; 0; 2h)$, $A(0; 0; 2h)$, $S''(h; h; 3h)$. Находим координаты векторов: $\overline{A'B} = (2h; 0; 2h)$, $\overline{AS''} = (h; h; h)$.
Если α – величина угла между $\overline{A'B}$ и $\overline{AS''}$, то, используя скалярное произведение векторов, имеем

$$\cos\alpha = \frac{\left(\overline{A'B} \cdot \overline{AS''}\right)}{\left|\overline{A'B}\right|\left|\overline{AS''}\right|} = \frac{2h^2 + 2h^2}{\sqrt{4h^2 + 4h^2}\sqrt{h^2 + h^2 + h^2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} .$$

8. $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$. *Указание.* Поскольку

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 ,$$

существует число φ такое, что

$$x - 3 = \sqrt{3}\cos\varphi , \quad y + 2 = \sqrt{3}\sin\varphi , \quad \varphi \in [0; 2\pi) .$$

Но тогда

$$2ax - 3y - 10 = \sqrt{3}\,(2a\cos\varphi - 3\sin\varphi) + 6a - 4 = U(\varphi) .$$

Нужно исследовать разность между максимальным и минимальным значениями $U(\varphi)$. Рассмотрим лишь слагаемые, зависящие от φ, и преобразуем их сумму:

$$\sqrt{3}\,(2a\cos\varphi - 3\sin\varphi) = \sqrt{3}\sqrt{4a^2 + 9}\cos(\varphi + \alpha) ,$$

где α – некоторое значение, определяемое из равенств

$$\cos\alpha = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + 9}} , \quad \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{4a^2 + 9}} .$$

Но тогда

$$U_{\max} - U_{\min} = 2\sqrt{3}\sqrt{4a^2 + 9} .$$

Осталось найти требуемые значения параметра a.

Физика

Физический факультет

1. Изменение силы натяжения подвеса, после того как стержень коснется поверхности воды, обусловлено действием сил со стороны воды на стержень. Поскольку диаметр стержня равен $d = 2\sqrt{\frac{M}{\pi\rho L}}$, толщина зазора между стенками цилиндра и стержнем составляет $\delta = 0,5(D-d) \approx 0,1416$ мм (оси стержня и цилиндра совпадают) и высота столба воды, отсчитываемая от нижнего основания стержня, при заданной толщине слоя воды между нижним основанием стержня и дном цилиндра (без учета капиллярных явлении) равна

$$H = \frac{(m/\rho_в) - 0,25\pi D^2 h}{0,25\pi\left(D^2 - d^2\right)} \approx 1,238 \text{ м},$$

где $\rho_в = 1$ г/см^3 – плотность воды. Так как в условии задачи не оговорено иное, будем считать, что цилиндр покоится относительно лабораторной системы отсчета и эту систему можно считать инерциальной. Тогда сила натяжения подвеса (считая величину ускорения свободного падения равной $g = 9,81$ м/с^2) уменьшится, без учета сил поверхностного натяжения, на величину

$$\Delta F = 0,25\pi d^2 \rho_в g H = Mg\frac{4m - \pi D^2 h\rho_в}{\pi D^2 L\rho - 4M} \approx 0,9448Mg \approx 46,34 \text{ Н}.$$

Как известно, давление под искривленной поверхностью жидкости за счет действия сил поверхностного натяжения при условии смачивания стенок меньше (а несмачивания – больше) давления над плоской поверхностью при тех же внешних условиях на величину, определяемую формулой Лапласа: $\Delta p = (1/R_1 + 1/R_2)\sigma$, где R_1 и R_2 – так называемые главные радиусы кривизны поверхности, а σ – коэффициент поверхностного натяжения. В рассматриваемом случае при полном смачивании или несмачивании цилиндра и стержня $R_1 = \delta/2$, а $R_2 \approx D/2$. Поскольку $D \gg \delta$, максимальная поправка на изменение силы натяжения подвеса, обусловленная действием сил поверхностного натяжения, при заданном погружении цилиндра должна быть равна

$$F_п = \frac{2\sigma}{\delta}\frac{\pi d^2}{4} = \frac{2\sigma}{(D/2)\sqrt{M/(\pi\rho L)}}\frac{M}{\rho L} \approx 3,92 \text{ Н}$$

(коэффициент поверхностного натяжения воды при температуре $t = 20\,°C$ и давлении $p = 760$ мм рт. ст. равен $\sigma \approx 0,0728$ Н/м). В этом расчете мы не учитывали силу, с которой на цилиндр действует верхняя кромка жидкости: при смачивании – вниз, а при несмачивании – вверх. Читатель может убедиться самостоятельно, что величина этой силы составляет долю $2\delta/d$ от величины $F_п$, т.е. приблизительно 0,4%.

Итак, в зависимости от степени смачивания цилиндра и стержня водой сила натяжения подвеса может уменьшиться на любую величину от $\Delta F - F_п \approx 42,4$ Н до $Mg \approx 49,05$ Н (нить не может давить на стержень). В последнем случае необходимо считать, что $R_1 > \delta/2$, т.е. модуль косинуса краевого угла отличен от единицы.

Следует отметить, что при решении данной задачи было необходимо правильно выбрать точность числовых расчетов.

2. Из условия задачи следует, что груз будет двигаться поступательно вдоль оси стержня. Поэтому положение груза будем определять вдоль оси X, совпадающей с осью стержня и направленной в сторону движения подвижной стенки. Начало отсчета вдоль этой оси совместим с положением центра масс груза, которую он имел при $t \le 0$. Поскольку до начала движения правой стенки пружины не были деформированы, можно утверждать, что эта ось покоится относительно инерциального наблюдателя. Тогда при $0 < t \le \tau$, где $\tau = L/v$, уравнение движения груза будет иметь вид

$$mx'' = -kx + k(vt - x),$$

где m – масса груза, а x – смещение центра масс (или любой другой фиксированной точки) груза к моменту времени t. Приведенное уравнение нужно решить с учетом того, что $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, так как при $t = 0$ по условию задачи пружины не деформированы. Обозначив $x' = y$, получим уравнение

$$my'' = -2ky + kv.$$

Поскольку k и v не зависят от времени, решение этого уравнения должно иметь вид

$$y = y_0\cos(\omega t + \varphi) + C,$$

где $\omega = \sqrt{2k/m}$. Из условий $y_0\cos\varphi + C = 0$ и $-y_0\omega\sin\varphi = 0$ получаем $\varphi = 0$ и $y_0 = -C$. Следовательно, $C = 0,5v$, а

$$x'(t) = 0,5v(1 - \cos\omega t).$$

При $t = \tau$ по условию задачи $x'(\tau) = v$, поэтому

$$\omega\tau = \sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{L}{v} = \pi,$$

откуда

$$m = \frac{2kL^2}{\pi^2 v^2}.$$

3. Будем решать задачу, полагая, что плоскость покоится относительно инерциального наблюдателя, размеры тела достаточно малы, а влиянием воздуха на движение тела можно пренебречь. Выберем систему координат так, как показано на рисунке 18. Тогда уравнение движения тела массой m в проекциях на оси выбранной системы координат можно представить в виде

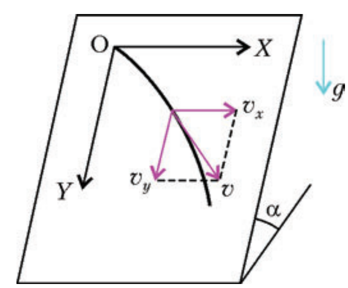


Рис. 18

$$mx'' = mv_x' = F_{тр\,x} = -\mu mg\frac{v_x}{v}\cos\alpha,$$

$$my'' = mv_y' = mg\sin\alpha + F_{тр\,y} = mg\sin\alpha - \mu mg\frac{v_y}{v}\cos\alpha,$$

где g – ускорение свободного падения, $F_{тр\,i}$ – проекция силы трения скольжения на соответствующую ось, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Из второго уравнения следует, что за малый промежуток времени dt приращение dv_y равно

$$dv_y = \frac{\left(v\sin\alpha - \mu v_y\cos\alpha\right)g\,dt}{v},$$

а приращение кинетической энергии тела составляет

$$dW_к = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mv\,dv = mgv_y(dt)\sin\alpha - \mu mgv(dt)\cos\alpha,$$

откуда

$$dv = \frac{\left(v_y\sin\alpha - \mu v\cos\alpha\right)g\,dt}{v}.$$

Умножая уравнение для dv_y на $\sin\alpha$, а уравнение для dv на $\mu\cos\alpha$ и складывая эти произведения, получим

$$\frac{d}{dt}\left(v\mu\cos\alpha + v_y\sin\alpha\right) = \left(\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha\right)g.$$

Поскольку при $t = 0$ тело имело $v = v_0$ и $v_y = 0$, из полученного уравнения следует, что

$$v\mu\cos\alpha + v_y\sin\alpha = v_0\mu\cos\alpha + \left(\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha\right)gt.$$

Отсюда, учитывая, что в момент остановки скорость тела обращается в ноль, находим время движения тела:

$$t_{\text{ост}} = \frac{v_0\mu}{\left(\mu^2 - \operatorname{tg}^2\alpha\right) g\cos\alpha}.$$

4. Как это обычно и делается при решении подобных задач, будем считать диск твердым телом. По условию задачи диск совершает плоское движение. Как известно, такое движение твердого тела можно рассматривать как суперпозицию двух движений: поступательного и вращательного вокруг оси, перпендикулярной плоскостям, в которых располагаются траектории точек диска. При этом скорость оси – скорость поступательного движения – зависит от выбора точки, называемой полюсом вращения, через которую проходит ось вращения, в то время как угловая скорость вращения не зависит от выбора полюса. Более того, всегда можно выбрать полюс так, чтобы для данного момента скорость оси вращения была равна нулю. Такую ось называют мгновенной осью вращения. При этом скорость любой точки твердого тела будет направлена перпендикулярно радиусу ее вращения (кратчайшему расстоянию от оси до данной точки) и равна произведению угловой скорости вращения на величину этого радиуса.

В соответствии со сказанным, находим точку O пересечения перпендикуляров к линиям скоростей точек A и B, восставленных из этих точек (рис.19). Если из двух возможных по условию задачи направлений скорость точки A в момент времени $t = 0$ направлена так, как показано на рисунке 19, то диск должен вращаться по часовой стрелке с угловой скоростью $\omega = v_A/\rho_A$, где $\rho_A = OA$ – мгновенный радиус вращения точки A. Из рисунка видно, что величина мгновенного радиуса ρ_B вращения точки B удовлетворяет соотношениям

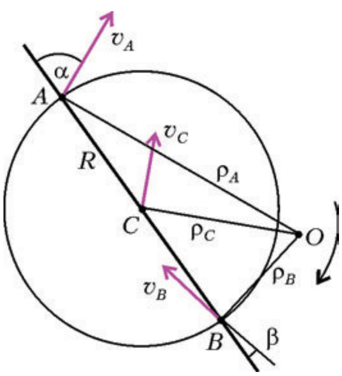


Рис. 19

$$\rho_A\cos\alpha = \rho_B\cos\beta, \qquad \rho_A\sin\alpha + \rho_B\sin\beta = 2R,$$

а потому

$$\rho_A = \frac{2R\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Кроме того, радиус вращения центра диска C в момент времени $t = 0$ равен

$$\rho_C = \sqrt{R^2 + \rho_A^2 - 2R\rho_A\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = R\sqrt{1 + \frac{4\cos^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} - \frac{4\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}},$$

а скорость этой точки в указанный момент времени направлена так, как показано на рисунке, и ее величина равна

$$v_C = \rho_C\omega.$$

По условию задачи диск скользит по гладкой горизонтальной плоскости, является однородным и нет указаний, что он подвергается действию каких-либо иных объектов, кроме плоскости и земли. Поэтому на основании теоремы о движении центра масс можно утверждать, что скорость его центра направлена горизонтально и не зависит от времени, а потому величина его перемещения за время τ равна $\Delta r = v_C\tau$. Окончательный расчет дает

$$\Delta r = \frac{v_A\tau}{2}\sqrt{\frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2\beta} + 4\frac{\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha}{\cos\beta}} = \frac{v_A\tau}{\sqrt{3}}.$$

5. Под действием электрических зарядов шариков на обращенных к ним сторонах пластин возникают индуцированные заряды противоположного знака. В результате на каждую из пластин со стороны ближайшего к ней шарика будет действовать сила притяжения, и пластины после отпускания начнут смещаться одинаковым образом от своих исходных положений. Пусть максимальное смещение каждой из пластин от исходного положения равно x_m. Поскольку размеры пластин велики и они соединены проводящей пружиной, можно считать, что электрического поля между пластинами нет, а энергия поля, создаваемого зарядами шариков и зарядами, индуцированными на указанных поверхностях пластин, когда пластины сместились от исходных положений на расстояние x, равна энергии поля двух точечных зарядов, находящихся в вакууме на расстоянии $2(L-x)$ друг от друга, т.е. равна

$$W_э = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0(L-x)}.$$

При этом потенциальная энергия упруго деформированной пружины будет равна

$$W_п = 2kx^2.$$

В соответствии с условием задачи силами сопротивления движению пластин следует пренебречь. Будем пренебрегать также излучением, возникающим при неравномерном движении заряженных пластин, индуктивностью пружины и ее омическим сопротивлением.

Поскольку первоначально пластины покоились и при максимальном смещении их скорость равна нулю, то, согласно закону сохранения энергии,

$$-\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 L} = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0(L-x_m)} + 2kx_m^2.$$

Обозначим $y_m = x_m/L$ и $B = q^2/\left(16\pi\varepsilon_0 kL^3\right)$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$y_m^2 - y_m + B = 0,$$

откуда

$$y_m = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - B}.$$

Следовательно, $B \le 0{,}25$, т.е. $q^2 \le 4\pi\varepsilon_0 kL^3$, а потому искомая величина заряда должна быть чуть меньше

$$q_{\max} = 2L\sqrt{\pi\varepsilon_0 kL}.$$

6. После замыкания ключа K_1 конденсатор емкостью C_1 будет заряжаться, а конденсатор емкостью C_2 будет оставаться незаряженным, так как диод D_2 заперт. После размыкания ключа K_1 и замыкания ключа K_2 диод D_1 откроется, и конденсатор емкостью C_1 начнет разряжаться через этот диод и катушку индуктивности. К моменту полного разряда этого конденсатора ток через катушку достигнет максимума, а в следующий момент времени откроется диод D_2 и конденсаторы будут перезаряжаться до тех пор, пока ток через катушку не станет равным нулю. Поскольку диоды считаются идеальными, то, пренебрегая, как обычно, влиянием соединительных проводов, можно утверждать, что к моменту прекращения тока через катушку напряжения на конденсаторах будут равны и достигнут максимального значения. После этого диод D_1 будет заперт, а потому, пренебрегая токами утечки конденсаторов, следует считать, что напряжение на конденсаторах изменяться не будет и напряжение на диоде D_2 будет оставаться равным нулю.

Таким образом, отношение установившегося напряжения на диоде D_2 к величине ЭДС батареи равно нулю.

7. При решении задачи будем , как обычно, пренебрегать токами утечки в конденсаторах схемы, а ключ K считать идеальным. После замыкания ключа конденсатор емкостью C_1

начнет заряжаться током, текущим не только через резистор R_1, но и током заряда конденсатора емкостью C_2. Ток заряда этого конденсатора будет уменьшаться со временем и станет равным нулю в тот момент, когда напряжение U_{C_2} на этом конденсаторе станет равным напряжению U_{R_1} на резисторе R_1. В этот же момент напряжение на диоде D станет равным нулю, а в последующие моменты диод будет заперт, так как по условию задачи он является идеальным. Следовательно, напряжение на конденсаторе емкостью C_2 в дальнейшем изменяться не будет, а потому должны выполняться соотношения

$$U_{C_2}(\tau) = U_{R_1}(\tau) = \frac{q}{C_2}.$$

Напряжение же на конденсаторе емкостью C_1 через время τ после замыкания ключа станет равным

$$U_{C_1}(\tau) = \mathcal{E} - U_{R_1}(\tau).$$

Поскольку зарядка этого конденсатора будет продолжаться до тех пор, пока напряжение на нем не станет равным ЭДС источника $\mathcal{E}$, через источник за время $t \ge \tau$ протечет заряд

$$\Delta q = \left(\mathcal{E} - U_{C_1}(\tau)\right)C_1,$$

а выделившееся на резисторе R_1 максимальное количество теплоты должно удовлетворять соотношению

$$Q(\tau,\infty) = \mathcal{E}\Delta q - 0{,}5\mathcal{E}^2 C_1 + 0{,}5\left(\mathcal{E} - U_{C_2}(\tau)\right)^2 C_1.$$

Итак,

$$Q \le Q(\tau,\infty) = \frac{q^2 C_1}{2C_2^2}.$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $\Delta t = \dfrac{4\pi d}{v_0} \approx 1{,}57$ с. **2.** $v_0 = \dfrac{3}{4}\sqrt{5gl} = 5{,}25$ м/с.

3. $F = \dfrac{mg}{\cos(\alpha/2)}$. **4.** $A = \dfrac{1}{8}\rho_{в} S L^2 g(3 - \sin\alpha) = \dfrac{5}{16}\rho_{в} S L^2 g$.

5. $l_{\max} = l + v_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$, $l_{\min} = l - v_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$.

6. $F_{\max} = mg\dfrac{M + 2m}{M + m}$. **7.** $r_{\min} = \dfrac{3\sigma R T_0}{(\mathrm{M_{в}} - \mathrm{M_{He}})p_0} \approx 2{,}73$ м.

8. $k = \dfrac{2\mathrm{M}_1}{\mathrm{M}_2} = 1$. **9.** $A = \dfrac{(3\eta/100\%) + 2}{2\left(1 - (\eta/100\%)\right)}R\Delta T \approx 1{,}35$ кДж.

10. $A = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 L}\left(1 - \dfrac{15q^2}{64\pi\varepsilon_0 k L^3}\right)$.

11. $R_2 = R_1\dfrac{k_2(k_1 - 1)}{k_1(1 - k_2)} = 3$ см, $Q_2 = Q_1\dfrac{k_1 - 1}{1 - k_2} = 6\cdot10^{-8}$ Кл.

12. $R(t) = R_0\left(1 - \dfrac{t}{\tau}\right)$, где $\tau = R_0 C$.

13. $F = C_0(\varepsilon - 1)\dfrac{\mathcal{E}^2}{2l}$. **14.** $\Delta U = BL\left(v - \dfrac{u^2}{v}\right) = 0{,}48$ В.

15. $q = q_0 - \dfrac{mv}{Bl}$. **16.** $T = \dfrac{4\pi R}{e}\sqrt{\pi\varepsilon_0 m R} \approx 2\cdot10^{-15}$ с.

17. $\sin\alpha_{\max} = \sqrt{n^2 - \dfrac{R^2}{(R - d)^2}} = 0{,}5$, $\alpha_{\max} = 30°$.

18. $n < 2$. **19.** $F = \dfrac{l\delta}{\Delta}$. **20.** $d = 5\lambda_1\sqrt{1 + \left(\dfrac{2F}{l}\right)^2} \approx 3{,}8$ мкм.

Химический факультет

Вариант 1

3. На интервале $0 \le t \le 1$ с. **4.** Увеличилась в 2 раза.

5. См. рис.20. **6.** $m = \dfrac{F_1 + F_2}{g} = 100$ кг.

7. $U_m = \sqrt{U^2 + \dfrac{LI^2}{C}} = \sqrt{6}$ В $\approx 2{,}45$ В.

8. $a_1 = \dfrac{F\cos\alpha}{m} - \dfrac{(F - ma)(mg - F\sin\alpha)}{m^2 g} \approx 0{,}16$ м/с^2.

9. $q = \dfrac{C\mathcal{E}}{2} = 10^{-3}$ Кл. **10.** $Q = 10{,}5RT_1 \approx 15{,}7$ кДж.

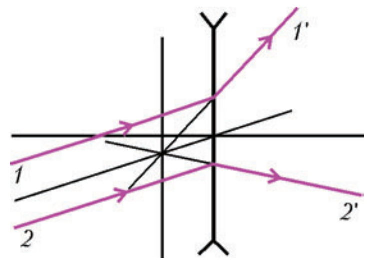


Рис. 20

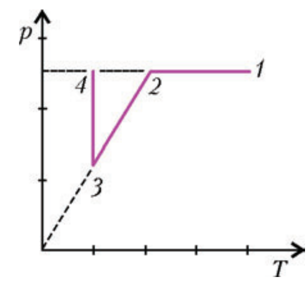


Рис. 21

Вариант 2

3. $A = 6$ Дж. **4.** См. рис.21.

5. $a = 2g\sin\alpha - \dfrac{F}{m} = 4$ м/с^2. **6.** $n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1 - (d/l)^2}} \approx 1{,}5$.

7. $Q = 0{,}5(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = 16$ кДж.

8. $\nu = \dfrac{\mathcal{E}}{2\pi BS} = 5$ Гц. **9.** $\eta = \dfrac{nhc}{\lambda I U} = 1{,}8\cdot10^{-6}$.

10. $q = -\dfrac{4\pi\varepsilon_0\left(R^2 + d^2\right)^{3/2} mg}{Qd} \approx 6{,}6\cdot10^{-8}$ Кл.

Квант журнал ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия,
М.В.Сумнина, В.М.Хлебникова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»;
тел.: 930-56-48;
e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области
Тел./факс: (501) 443-92-17, Тел./факс: (272) 6-25-36
E-mail: chpk_marketing@chehov/ru

Счастливые часов не наблюдают?

До шестидесятых годов XIX столетия шахматные партии в турнирах игрались без ограничения времени. Иногда они продолжались чуть ли не целые сутки, а соперники размышляли над ходами по несколько часов. Некоторым шахматистам удавалось подремать в ожидании ответа, а более нервные демонстративно обращались к зрителям с просьбой разбудить их, когда противник, наконец, соизволит сделать ход. Сильнейший шахматист середины позапрошлого века Г.Стаунтон однажды даже собирался привлечь к суду своих соперников, которые, будучи не в состоянии переиграть его, пытались «пересидеть» за доской.

Во время Лондонского турнира 1851 года, первого международного состязания, возле каждого столика сидел секретарь – он фиксировал ходы и подробно описывал течение борьбы. В день партии Уильямс – Маклоу глубокой ночью секретарь сделал запись: «Партия осталась неоконченной, поскольку оба противника заснули». Один из лондонских журналов, освещавших турнир, не без иронии писал: «Время – капитал нашей страны, по своей значимости не уступающий банковскому кредиту. Ради экономии времени присяжные сплошь и рядом осуждают людей, вина которых не доказана, а судьи отправляют их на виселицу. А вот шахматисты представляют собой единственный разряд людей, полностью игнорирующих фактор времени».

Механические шахматные часы сконструировал английский инженер Т.Уилсон из Манчестера в конце XIX века. Часы представляли собой единый корпус с двумя механизмами и двумя циферблатами. Сделав ход, шахматист нажимает на кнопку и с помощью вмонтированного рычажка выключает свои часы и включает часы партнера. У каждого из играющих на циферблате имеется флажок. Когда минутная стрелка приближается к «12», он поднимается, «повисает», а при достижении стрелкой верхней точки – падает. В дальнейшем шахматные часы совершенствовались, но сама идея не претерпела особых изменений.

Впервые шахматные часы были применены в Лондонском международном турнире 1883 года и с тех пор стали обязательным атрибутом всех соревнований, как и сами шахматы – доска и фигуры. А игроки в шутку назвали их «самыми быстроходными часами в мире».

«Кажется сущей безделицей, а на самом деле шахматные часы обладают огромной властью, – писал гроссмейстер Р.Шпильман. – Игрокам они представляются истинным бичом и тираном... У них есть свои господа и рабы. Господин – тот, кто ведет борьбу в полной уверенности, что в состоянии преодолеть парализующий страх, раб – тот, кто робок и нерешителен».

Надо сказать, что на рубеже XIX и XX веков многие маэстро пользовались шахматными часами без особого энтузиазма. Так, в 1906 году на турнире в Нюрнберге в правилах был введен такой пункт: «Шахматист после падения флажка имеет право за определенную плату купить добавочные пять минут». Забавно, что польский мастер Д.Пшепюрка, состоятельный человек, истратил на покупку времени солидную сумму денег, что не помешало ему занять одно из последних мест.

После изобретения шахматных часов естественно возникло понятие «контроль времени». Перед каждой партией обоим игрокам на часах ставится одно и то же фиксированное время, за которое нужно сделать определенное число ходов. Если время у игрока закончится раньше, чем сделаны все положенные ходы, в момент падения флажка ему немедленно засчитывается поражение. Конечно, время на часах устанавливается так, чтобы при его окончании минутная стрелка занимала вертикальное положение, т.е. флажок в этот момент действительно падает.

Когда-то был популярен такой контроль – 2 часа на 30 ходов и затем 1 час на каждые последующие 15. С середины XX века в ответственных соревнованиях, включая матчи на первенство мира, применялся другой контроль – 2,5 часа на 40 ходов и далее 1 час на каждые 16. Такой контроль почти полвека считался классическим. По сложившейся традиции, время заканчивается в 14.00, значит, при таком контроле перед началом партии партнерам ставится на часах 11.30 (разумеется, и в 12.00, и в 13.00 флажок на часах тоже падает, но это не принимается в расчет).

Благодаря внедрению шахматных часов, еще в XIX веке особую популярность приобрела игра в блиц, где у каждого соперника имеется по 5 минут на партию. Впрочем, иногда играют по 4, по 3 и даже по 2 минуты на партию. Часто используется и временнáя фора. Например, более слабый игрок имеет 5 минут на партию, а более сильный – 3.

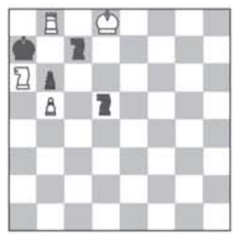
Во второй половине XX века популярность завоевал новый вид соревнований – быстрые шахматы (рапид): у игроков по 25 минут на всю партию (реже по 15 или 30). Основоположником быстрых шахмат можно считать гроссмейстера Давида Бронштейна. Именно по его инициативе в 1971 году прошел первый Кубок Москвы (замечу в скобках, что победил автор этой статьи – как давно это было!) и стал проводиться Кубок России. А вскоре рапид вышел на международный уровень, и ныне соревнования по быстрым шахматам проводятся не реже, чем по классическим.

Конечно, при малом времени качество партий снижается, глубокие и тонкие замыслы встречаются реже. Впрочем, и в быстрых шахматах, и в блице иногда игроки проводят красивые комбинации – концентрация мысли способствует тому, что мастер «на флажке» обнаруживает эффектное и неожиданное продолжение. А некоторые гроссмейстеры даже включают партии, сыгранные с укороченным контролем, в свои сборники.

Приведем один уникальный пример: изящная комбинация из партии в блиц уже девять десятилетий входит в золотой фонд шахматного искусства!

Капабланка – Ласкер

Берлин, 1914



1. ♘:c7 ♘:c7 2. ♖a8+!! Парадоксально: чтобы выиграть, белым надо избавиться от ладьи. Немедленное 2. ♔:c7 вело к пату, а 2. ♔c8 ♘:b5 – к простой ничьей.

2... ♘:a8. После 2... ♔:a8 3. ♔:c7 ♔a7 4. ♔c6 ♔a8 5. ♔:b6 белая пешка проходит в ферзи.

3. ♔c8! Черные сдались. Теперь на 3... ♘c7 уже можно взять коня: 4. ♔:c7 и т.д.

Эта партия с пикантным финалом была сыграна в блиц-матче между двумя корифеями шахмат, закончившимся победой Капабланки 6,5:3,5. Позиция на диаграмме представляет собой готовый этюд, хотя, конечно, не очень сложный, и иногда приводится как совместное произведение двух чемпионов мира (при этом белый король в исходной позиции стоит на d7, а черный конь d5 переставлен на e6).

Е.Гик

Индекс
70465 – по каталогу "Роспечать"

Физики и математики на монетах мира

Отчеканенная предположительно в годы царствования (98–117) римского императора Траяна монета с изображением ПИФАГОРА (около 570 - около 500 до нашей эры) является первым нумизматическим памятником великому математику. Вторым памятником служит треугольная монета достоинством в 2000 шиллингов, выпущенная Угандой в 2000 году нашей эры.